

بسمه تعالی،
... و له الأسماء الحسنی.



دانشکده مهندسی شیمی و نفت
دانشگاه صنعتی شریف

کنترل فرآیندها (۲۶۳۴۶)

(جزوه درسی)

گروه شبیه‌سازی و کنترل فرآیندها
سید محمودرضا پیشوایی، پاییز ۱۳۸۵

فهرست

- جلسه اول - معرفی دینامیک فرآیندها و ضرورت کنترل
- جلسه دوم - تبدیل لاپلاس
- جلسه سوم - مدل سازی ورودی- خروجی، توابع انتقال
- جلسه چهارم - نمونه‌های فیزیکی سیستم‌های درجه اول - خطی سازی
- جلسه پنجم - سیستم‌های درجه دوم
- جلسه ششم - سایر سیستم‌های دینامیکی خطی
- جلسه هفتم - سیستم‌های تک حلقه (SISO)
- جلسه هشتم - ابزار دقیق (اجزای سخت افزاری)، سنسور، شیر کنترل و کنترلر
- جلسه نهم - توابع انتقال مدار بسته
- جلسه دهم - پایداری و تحلیل خطا
- جلسه یازدهم - مکان هندسی ریشه‌ها
- جلسه دوازدهم - کاربرد مکان هندسی ریشه‌ها در تحلیل و عملکرد سیستم‌های کنترل
- جلسه سیزدهم - آشنایی با پاسخ فرکانسی
- جلسه چهاردهم - دیاگرام‌های Bode
- جلسه پانزدهم - تنظیم کنترلر
- جلسه شانزدهم - پاسخ فرکانسی، دیاگرام نایکوئیست

منظور از کنترل فرآیندها چیست؟

برای پاسخ به این سوال باید دید از چه زوایای به موضوع می‌نگریم:

زاویه اول، سیستم‌های دینامیکی و استاتیکی: تقریباً تمامی دروس کارشناسی مهندسی شیمی در حوزه حالت یکنواخت یا پایا کار می‌کنند، به‌ویژه دروس طراحی نظیر عملیات واحد ۱ و ۲، مکانیک سیالات، انتقال حرارت و ترمودینامیک. این در حالیست که حوزه کاری درس کنترل در آن دوره زمانیست که $\partial/\partial t \neq 0$ باشد، به عبارتی در حوزه حالت غیریکنواخت و پویاست.

زاویه دوم، دیدگاه فلسفی: سه حوزه کاری در علوم مهندسی وجود دارند که از بسیاری جنبه‌ها با هم تداخل و تعامل اصطلاحی، مفهومی و فلسفی دارند: مهندسی کنترل، مهندسی سیستم‌ها و مهندسی اطلاعات. بسیاری از مفاهیم کنترل برگرفته از ایده‌ها و مفاهیم دو رشته دیگرست. به‌طور مثال اصطلاحات کنترل‌پذیری، ورودی - خروجی و مشاهده‌پذیری از مهندسی سیستم‌ها و مفاهیم کنترل فیدبک، جریان اطلاعات و مدل معکوس از مهندسی اطلاعات اقتباس شده‌اند.

زاویه سوم، تنوع فیلد: از نظر آکادمیک، یک وحدت نظر در باره تئوری کنترل وجود دارد، ولی از نظر کاربردی و زمینه کاری سه فیلد متکثر وجود دارد:

- مهندسی برق: پردازش سیگنال، مدارات و شبکه RC، ماشینهای الکتریکی و ناوبری.
- مهندسی مکانیک: ابزار دقیق (نیوماتیک و هیدرولیک) و رباتیک.
- مهندسی شیمی: کنترل فرآیندها به‌صورت تک حلقه و جامع.

زاویه چهارم، وظایف شغلی و حرفه‌ای: یک مهندس شیمی در حیطه وظایف شغلی خود ممکنست در موارد زیر با مباحث کنترل و ابزار دقیق مواجه شود:

- تعریف و تامین PFD-P&ID و دیاگرام‌های مربوطه.
- تهیه لیست TAGها و لیست Inventory Control.
- طراحی و فهم سیستم کنترل جامع، به‌ویژه بحث تداخل و Pairing.
- مهندسی و تحلیل سیستم.

تعریف و توصیف نیازها و اهداف

یک فرآیند شیمیایی عملاً یک آرایش منطقی و مهندسی از واحدهای پردازش‌کننده نظیر راکتورها، مبدل‌های حرارتی، برج‌های جذب و تقطیر، پمپ‌ها و تبخیرکننده‌ها می‌باشد. هدف و علت وجودی فرآیند، تبدیل یک سری ورودی مواد خام و اولیه به محصولاتی با ارزش افزوده بالا می‌باشد. در حین عملیات، این هدف باید تحت یک سری قیود اعم از فنی، اقتصادی، اجتماعی و همچنین اغتشاشات محیطی انجام پذیرد:

- ایمنی (پرسنل) و حفظ تجهیزات،
- مشخصه‌های مطلوب محصولات، قوانین زیست محیطی،

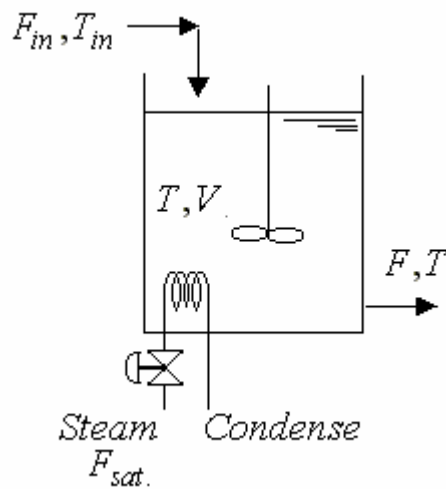
- صرفه اقتصادی.

لذا، بدیهیست که برای یک فرآیند، هم مانیتورینگ (پایش) داشته باشیم و هم کنترل (پاسش).

تحلیل مشخصه‌ها و مسائل طراحی

سه هدف کلان از به کارگیری سیستم کنترل فرآیند عبارتند از:

- **عملکرد - محور:** واداشتن سیستم در باقی ماندن در مقادیر مقرر و/یا رگولاسیون،
 - **پایدار - محور:** تضمین پایداری سیستم و جلوگیری از فرار حالات و تعطیلی فرآیند،
 - **بهینه‌سازی:** بهینه کردن عملکرد فرآیند با اعمال سیاست‌های کنترلی.
- برای شرح نکات محوری بالا و همچنین تبیین مبادی تصور، فرض کنید یک فرآیند یوتیلیتی شامل یک تانک پیش گرمکن برای یک راکتور شیمیایی در پایین دست داریم (شکل ۱). هدف کنترلی عبارتست از:
- دمای خروجی (T) در یک حد مقرر باقی بماند، و/یا
 - دمای خروجی یک پروفیل دمایی را تعقیب کند، و/یا
 - سطح مایع (V) یا در صورت سطح مقطع ثابت، (h) در یک حد مقرر باقی بماند.
- متغیرهایی که می‌توانند به عنوان اغتشاش (کمیت‌های تاثیرگذار ولی ناخواسته) در نظر گرفته شوند، یکی T_{in} و دیگری F_{in} و یا حتی فشاربخار اشباع می‌باشند. در صورتی که T_{in} و F_{in} و یا حتی فشاربخار ثابت بمانند، یعنی سیستم در حالت یکنواخت بماند، دیگر نیازی به کنترل یا نظارت خود کار و یا حتی دستی (توسط اپراتور) نیست. بدیهیست که در عمل اینطور نبوده و با کاهش و افزایش فشار خط و یا سایر آثار محیطی کمیت‌های مذکور مرتباً عوض می‌شوند. بنابر این باید به نحوی کمیت‌های تاثیرپذیر (T یا h) را کنترل کنیم.



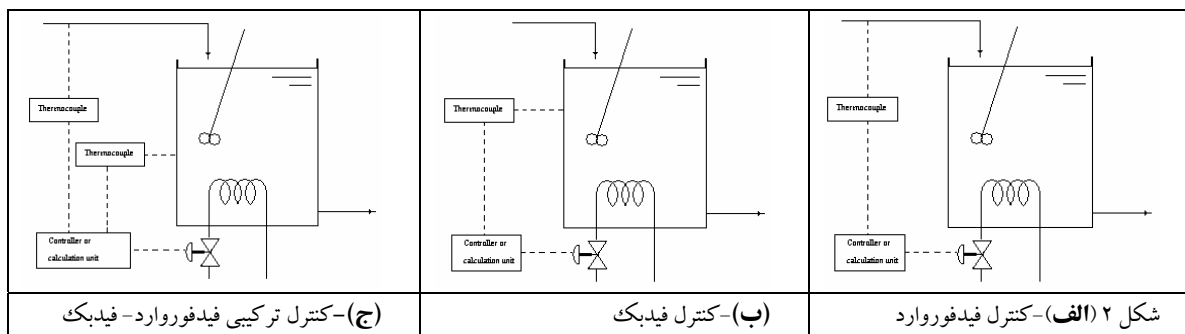
شکل ۱- دیاگرام جریان یک فرآیند اختلاط.

به‌هرحال نکته قابل توجه اینست که فارغ از پیاده‌سازی کنترل دستی یا خودکار باید دید چگونه T و V را - که تحت تاثیر متغیرهای T_{in} ، F_{in} یا فشار بخار اشباع عوض شده‌اند - می‌توان به‌طور واقعی و عملی مجبور به برگشتن به مقدار مقرر خودشان کرد. شاید اولین چیزی که به ذهن می‌رسد این باشد که با یک سطل (مکانیسم دستی) یا یک جریان مجهز به شیر (مکانیسم خودکار و ماشینی) مقدار V را مستقیماً عوض کنیم ولی این کار برای متغیر T ممکن نیست. لذا، اولین و مهمترین نکته کنترل تغییر هدفمند کمیت‌های موردنظر به‌طور غیرمستقیم می‌باشد.

نکته دوم در وجود یا حضور ابزار دقیق است. برای کنترل دستی یا خودکار باید به‌نحوی بفهمیم که متغیر موردنظر آیا اصلاً عوض شده‌است که نیازمند انفعال ما باشد یا خیر. لذا وجود نشانگرها و سنجشگرهای ارزانی مثل ترموکوپل‌ها (برای اندازه‌گیری T) یا عمق‌سنج‌ها (برای اندازه‌گیری V یا h) برای دانستن بدون خطای مقدار کمیت‌های موردنظر ما (اعم از تاثیرگذار و تاثیرپذیر!) الزامیست.

نکته سوم که در راستای نکته اول است به این شرح است که کدام متغیر تاثیرگذار مهندسی و ماکرو (مثل شدت جریان‌ها نه مثلاً کشش سطحی سیال یا انروپی سیستم!) را انتخاب کنیم تا وسیله تاثیرگذاری موثر و البته غیرمستقیم روی کمیت تاثیرپذیر مورد نظر ما باشد. برای مثال کاندیداهای مناسب عبارتند از شدت جریان ورودی (F_{in})، شدت جریان خروجی (F) و یا شدت جریان بخار اشباع. دقت شود که کمیت فیزیکی و ماکروی T_{in} نیز یک کاندیدای متغیر تاثیرگذار می‌باشد ولی تغییر دادن T_{in} از نظر عملی گران است (نیاز به دو شیر کنترل می‌باشد، فافهم).

نکته چهارم (و آخر)، فلسفه و نحوه مقابله با تغییر کمیت‌های موردنظر می‌باشد. اگر بدانیم غالباً یا معمولاً، منشا تغییر کمیت تاثیرپذیر (مثلاً T)، تغییر در شدت جریان ورودی (F_{in}) است، آنگاه ممکنست بخواهیم با علت مقابله کنیم. لذا، باید یک اندازه‌گیری روی اغتشاش F_{in} (نیز) داشته‌باشیم و متناسب با مقدار آن انفعال نشان دهیم یعنی متغیر تاثیرگذار (مثلاً شدت جریان بخار اشباع) را عوض کنیم. این آرایش و منطق مقابله با اغتشاش موسوم به سیستم کنترل پیشخور یا فیدفوروارد (Feedforward) یا فعال می‌باشد. در طرف مقابل اگر بخواهیم با معلول مقابله کنیم، یعنی انفعالی برخورد کنیم، آنگاه فلسفه پسخور یا فیدبک (Feedback) را انتخاب کرده‌ایم. در این آرایش تنها المان اندازه‌گیری فقط شامل همان متغیر تاثیرپذیر می‌شود. این نوع مکانیسم کنترل رایج‌ترین نوع کنترل در فرآیندها می‌باشد. در شکل ۲ سه نمونه آرایش کنترلی خودکار نشان داده شده‌است. لازم به‌ذکر است به‌خاطر تمایز هرچه بیشتر، خطوط کنترلی یا سیگنال‌ها تماماً با خط چین نشان داده شده‌اند تا با جریان مواد یا حتی انرژی اشتباه نشوند.



نکته: دقت شود که یک سیستم بدون کنترل (نمایش دیاگرام با یک PFD ساده) با یک سیستم مجهز به کنترل خودکار (نمایش دیاگرام با یک P& ID) به اندازه زیرزمین تا آسمان تفاوت دارد! فافهم.

نکته: اسامی مختلف کنترلر عبارتند از:

- (شناسنامه‌ای) Controller
- (معمولا برای راکتورها) Stabilizer
- (اصطلاح مکانیکی) Compensator
- (فرآیندی) Regulator
- (برقی) Tracker, Follower
- (ریاضی) Calculator, Estimator
- (مدرن) Computer
- (تاریخی) Governor

مقدمه

هر شاخه از علوم مهندسی در زیر شاخه‌های خود، نیازمند ابزار چه تحلیلی و چه طراحی می‌باشد. مهندسی کنترل نیز از این قاعده مستثنی نیست و سنتاً از تبدیل لاپلاس برای اهداف تحلیلی (بیان مدل) و طراحی کنترلر بهره می‌برد. شایان ذکر است که در حوزه‌های ریاضی کاربردی، تبدیل لاپلاس به عنوان یک روش حل برای معادلات دیفرانسیل (معادلات مشتقی) آنهم از فامیلی خطی بهره می‌برد، ولی در مهندسی کنترل، حل معادلات دیفرانسیل هدف نیست، بلکه وسیله‌ای برای بیان مدل ریاضی سیستم‌های دینامیکی می‌باشد. جوهر اصلی و کاربرد اساسی تبدیل لاپلاس، تبدیل مشتق به یک چند جمله‌ای نمایشی است. علت رواج این امر، تبدیل شدن معادلات دیفرانسیلی به رنگ و لعابی دیگر و مانوس به ذهن، یعنی معادلات جبری (استاتیکی) می‌باشد.

تعریف تبدیل لاپلاس در قاموس حساب اپراتوری - تبدیل لاپلاس یک تابع تک متغیره از متغیره حقیقی t ، مثلاً $f(t)$ به یک تابع (نگاشت) با ساختاری متفاوت نظیر $F(s)$ ، یعنی یک تابع تحلیلی تک متغیره از متغیره مختلط s به شکل زیر می‌باشد:

$$F(s) = \int_{0+}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (1)$$

و به طور مختصر و نمادین:

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} \text{ و } F(s) = L\{f(t)\} \quad (2)$$

فایده ۱: از نظر نماد گذاری، فرق بین $f(t)$ و $F(s)$ گذاشتیم، تا معلوم شود، یکی در حوزه زمان (t) است و دیگری در حوزه s .

فایده ۲: از نظر نماد گذاری از آکولاد، یعنی $\{\}$ استفاده کردیم تا به طور گویا و خوانا منظورمان را از اپراتور لاپلاس بیان کنیم و با $()$ و $[\]$ که بیشتر مصرف جداسازی یا تابعیت دارند، اشتباه نشود.

فایده ۳: در فرمول تبدیل لاپلاس، داخل انتگرال، متغیر t یک متغیره نخودی^۱ است و متغیره s یک پارامتر است، در حالیکه همین s برای $F(s)$ یک متغیره مستقل است، فتامل.

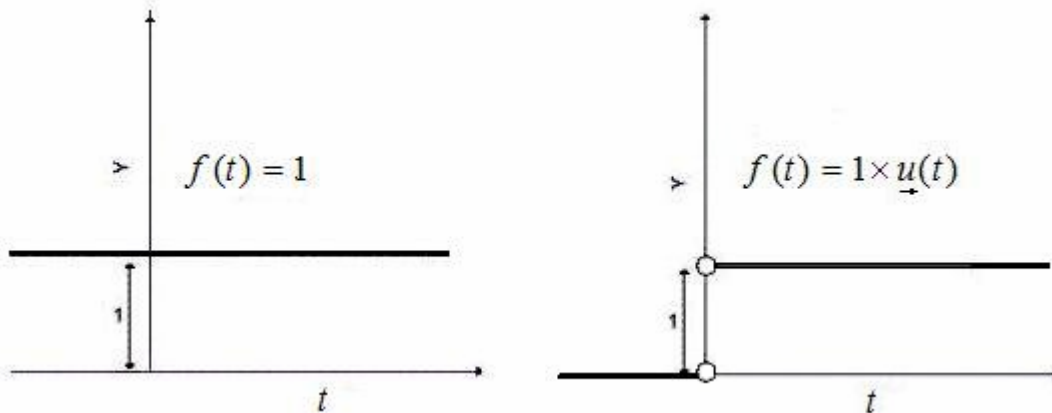
فایده ۴: در برخی هندبوک‌های ریاضی، به جای s از حرف p استفاده می‌کنند. (اکثر دانشمندان روسی) و به جای $F(s)$ ، از نماد $\bar{f}(s)$ استفاده می‌کنند.

چند مثال ساده (ولی پایه‌ای)

برای آشنایی مقدماتی با تبدیل لاپلاس، چند تابع $f(t)$ پایه (مشخصاً پله، نمایی، شیب و سینوسی) را فقط با استفاده از تعریف لاپلاس و نه قضایای (خواص) آن، به دامنه لاپلاس تبدیل می‌کنیم.

¹ Dummy variable

مثال ۱- مطلوبست تبدیل لاپلاس $f(t) = 1$ یا تابع پله واحد $f(t) = 1 \times u(t)$
 حل: تابع $f(t) = 1$ در شکل زیر رسم شده است. برای تبدیل لاپلاس آن از تعریف اپراتوری لاپلاس بهره می گیریم.



شکل ۱. نمایش تابع پله واحد با فرمت مناسب کنترلی (راست) و حالت پیوسته (چپ)

$$L\{f(t)\} = L\{1\} = L\{u(t)\} = \int_{0^+}^{\infty} (1)e^{-st} dt = \left(-\frac{e^{-st}}{s} \right)_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{s}$$

نکته ۱: به تفاوت دو تابع (از نظر نمایشی دقت شود. موقع انتگرال گیری از قیافه $f(t) = 1$ استفاده می کنیم ولی در نظر لاپلاس و منظر کنترلی، آن را به صورت $f(t) = 1 \times u(t)$ یا تابع دیریکله زیر نشان می دهیم:

$$f(t): \quad u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \quad (۳)$$

علت اینست که در تعریف لاپلاس که حالت خاصی از تبدیل فوریه است، حد پایین انتگرال از صفر یا به عبارت دقیق تر از 0^+ شروع شده است، لذا با مقدار تابع در قبل از صفر (یعنی گستره $t < 0$) کاری نداریم. همچنین تابع در $t = 0$ تعریف نشده است، که علت آن هم باز به خاطر تعریف لاپلاس است ولی اصرار داریم حتما به صورت پله نمایش دهیم (ولی هنگام انتگرال گیری با همان $f(t) = 1$ تا به نوعی نشان دهیم که تابع مزبور یک سیگنال (یک کمیت متغیر با زمان) است و دچار فراز و نشیب و به عبارت بهتر، دچار "تغییر" می شود. "تغییر" به زبان فلسفی، "حرکت" است و به زبان گمی و مهندسی و عددی، در معادلات دیفرانسیل (معادلات مشتقی) ظاهر شده و نشان از دینامیک دارد. فافهم!

مثال ۲- مطلوبست تابع تبدیل لاپلاس تابع نمایشی:

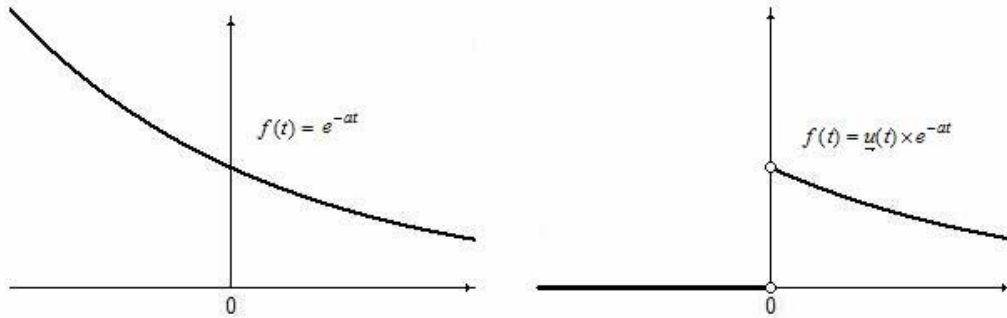
$$f(t) = e^{-at} \quad \text{or} \quad f(t) = u(t) \times e^{-at} \quad \text{or} \quad f(t) = \begin{cases} e^{-at} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

حل: مجدداً با استفاده از تعریف تبدیل لاپلاس:

$$L\{f(t)\} = L\{u(t) \times e^{-at}\} = \int_{0^+}^{\infty} (e^{-a\xi}) e^{-s\xi} d\xi = \left(-\frac{e^{-(s+a)\xi}}{s+a} \right)_{\xi=0}^{\xi=\infty} = \frac{1}{s+a}$$

نکته ۲: کاراکتر ξ را به جای t نوشتیم تا مؤید نکته پیش گفته باشد: متغیر t در عبارت زیر انتگرال، یک متغیر نخودی است.

نکته ۳: در نمودارها، خبری از واحدهای مهندسی و فیزیکی نیست. علت اینست که اصولاً نمودارها در علوم مهندسی فقط بار اطلاعاتی دارند، یعنی به درد قضاوت می‌خورند. دوران نمودارها و چارت‌های خواص فیزیکی گذشته است و لذا نمودارهای فعلی بیشتر مصرف کیفی دارند تا کمی و دقیق. پس، به دایره‌های روی شکل (۲) در $t=0$ دقت کنید!



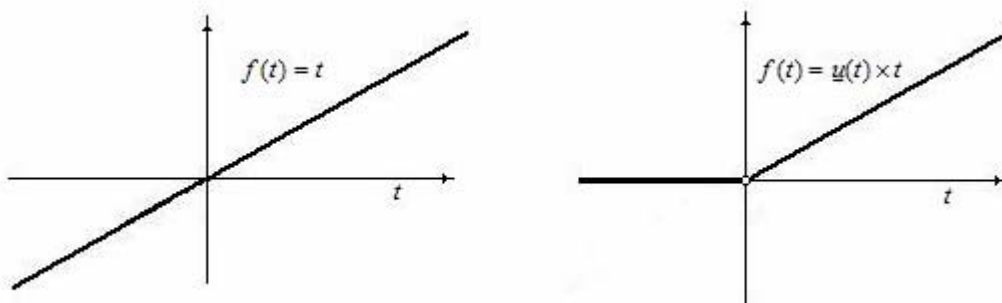
شکل ۲. نمایش تابع نمایی با فرمت مناسب کنترلی (راست) و حالت پیوسته (چپ)

مثال ۳: تابع خطی (شیب یا ramp) زیر را در نظر بگیرید (خطی با شیب واحد و عرض از مبدأ برابر با صفر)

$$f(t) = t \text{ or } f(t) = \underline{u}(t) \times t \text{ or } f(t) = \begin{cases} t & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

حل: مجدداً با استفاده از تعریف تبدیل لاپلاس:

$$L\{f(t)\} = L\{\underline{u}(t) \times t\} = \int_{0^+}^{\infty} (\xi) e^{-s\xi} d\xi = \left(-e^{-s\xi} \left(\frac{\xi}{s} + \frac{1}{s^2} \right) \right)_{\xi=0}^{\xi=\infty} = \frac{1}{s^2}$$



شکل ۳. نمایش تابع شیب با فرمت مناسب کنترلی (راست) و حالت پیوسته (چپ)

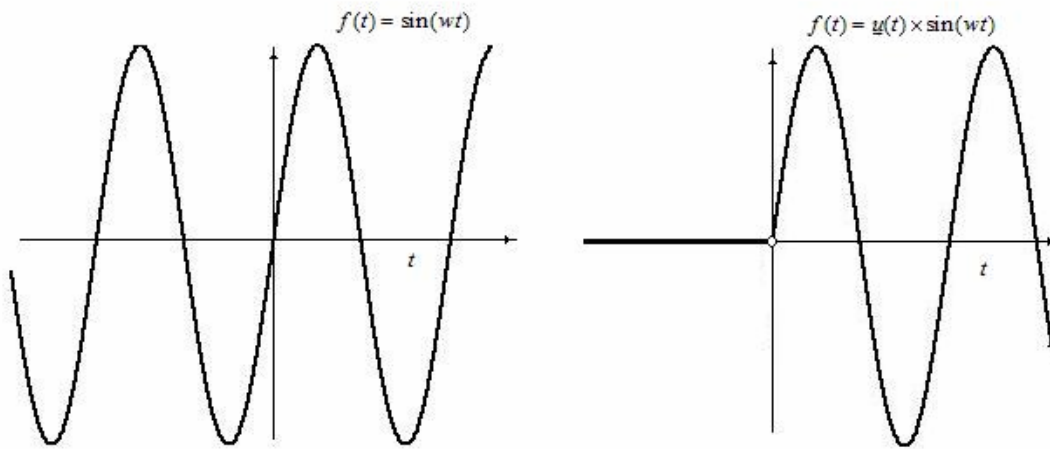
نکته ۴: همین نتیجه را می‌توانستیم با استفاده از قضایای لاپلاس (مشخصاً قضیه انتگرال) بدون محاسبه بالا (استفاده از انتگرال جزء به جزء برای محاسبه انتگرال) انجام دهیم. بحث مفصل و جامع قضایا (خواص) در ادامه خواهد آمد.

مثال ۴- تابع تناوبی (سینوسی) زیر را در نظر بگیرید (سینوس با دامنه واحد و فرکانس w)

$$f(t) = \sin(wt) \quad \text{or} \quad f(t) = \underline{u}(t) \times \sin(wt) \quad \text{or} \quad f(t) = \begin{cases} \sin(wt) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

حل: با استفاده از تبدیل لاپلاس (البته تعریف آن):

$$\begin{aligned} L\{f(t)\} &= L\{\underline{u}(t) \times \sin(wt)\} = \int_{0^+}^{\infty} (\sin(w\xi)) e^{-s\xi} d\xi = \dots \\ &= \left(\frac{e^{-s\xi}}{s^2 + w^2} (s \sin(w\xi) + w \cos(w\xi)) \right) \Bigg|_{\xi=0}^{\xi=\infty} = \frac{w}{s^2 + w^2} \end{aligned}$$



شکل ۴. نمایش تابع سینوسی با فرمت مناسب کنترلی (راست) و حالت پیوسته (چپ)

قضایا و خواص تبدیل لاپلاس

زبان، مبادی، مفردات و مفاهیم ریاضی را می‌توان به دو گونه نگریست، یکی ریاضی انواری، عرشی، آسمانی و تحلیلی و دیگری ریاضی ابزاری، کاربردی، زمینی و طراحی. در ریاضی انواری، هدف فهم، تحلیل و شناخت مسئله بوده و به عبارتی دخیل در حوزه دانش چرایی (know why) بوده و با عبارات و تعاریف سروکار دارد. این درحالیست که در ریاضی ابزاری، هدف سنتز، داوری (به مفهوم پیشگویی و پیش داوری و نه پیش بینی!) و طراحی بوده و به عبارتی دخیل در حوزه دانش چگونگی (know how) می‌باشد. در ریاضی کاربردی، با قضایا و خواص سروکار داریم. یک مثال روشن آن در مسائل بهینه‌یابی یا محاسبه اکسترمم (مینیمم یا ماگزیمم است). اگر بخواهیم از تعریف برای یافتن مقدار مینیمم یک تابع استفاده کنیم، باید با جستجو و ارزیابی تک تک حالات ممکن این کار را انجام دهیم که یک کار پردردسر (ولو یک متغیره) و زمانبرست، در نتیجه محتاج کامپیوتر خواهیم شد، ولی اگر از قضیه برای یافتن مقدار مینیمم بهره بگیریم، آنگاه کفایت آگاه از قضیه تیلور یا قضیه اکسترمم باشیم که می‌گوید: شرط لازم اکسترمم بودن یک نقطه از تابع (مثلاً یک

متغیره) اینست که مشتق تابع در آنجا صفر باشد. لذا مسأله بهینه‌یابی تحویل، تقلیل و تبدیل به مسأله حل یک معادله (در حالت چند متغیره، یک دستگاه معادله) جبری شده است! یعنی تیپ مسائلی که با دانش روز ریاضی ما سازگار و مأنوس است.

در درس کنترل فرآیندها، مشخصاً و صراحتاً از قضایای لاپلاس استفاده می‌کنیم تا تعریف آن. خواص و قضایای لاپلاس معمولاً در پنج حوزه زیر کاربرد دارد:

- ۱- تبدیل معکوس لاپلاس
 - ۲- حل معادلات دیفرانسیل
 - ۳- بیان جبری یک معادله دیفرانسیل که معرف یک سیستم فیزیکوشیمیایی دینامیکی باشد.
 - ۴- تحلیل پایداری
 - ۵- طراحی کنترلر
- همانطور که از سرفصل‌های مذکور معلومست، دو مورد اول برای ما (مهندسين شیمی، مهندسين کنترل)، مسیر، راه‌گذر و معبر محسوب شده در حالیکه سه مورد بعدی، برای ما، منزل، مقصود و مقام حساب می‌شود.

خواص و قضایای هشتگانه تبدیل لاپلاس به طور خلاصه عبارتند از (به ترتیب اهمیت)

- ۱- خاصیت خطی بودن اپراتور لاپلاس
- ۲- خاصیت مشتق
- ۳- قضیه مقدار نهایی
- ۴- قضیه مقدار اولیه
- ۵- انتقال تبدیل ($F(s)$ Shift)
- ۶- انتقال تابع ($f(t)$ Shift)
- ۷- تبدیل تابع (توزیع) دیراک (ضربان یا پالس ایده آل)
- ۸- تبدیل انتگرال

در ادامه به شرح کشف تک تک خواص بالا می‌پردازیم.

۱- خاصیت خطی بودن اپراتور لاپلاس. مهم‌ترین خاصیت و کاربردی‌ترین و در عین حال اساسی‌ترین و پنهان‌ترین خاصیت تبدیل لاپلاس که آنرا به مجسمه ابزار ریاضی کنترل خطی تبدیل کرده‌است، همین خاصیت هندسی (استدلالی) خطی بودن می‌باشد. در لسان توپولوژی (هندسه کیفی) اپراتورهای خطی، اپراتورهایی هستند که هنگام تبدیل نگاشت، محصول عمل شده نه تقعر دارد و نه تحدب! یعنی هیچ قبض و بسطی رخ نمی‌دهد که آنالیز پیچیده و دیفئومورفیسم (Diffeomorphism) مشکلی بطلبد و لذا مقتضی حال مهندسی کنترل کلاسیک می‌باشد. به بیان ساده ریاضی، خطی بودن اپراتور لاپلاس (مثل اپراتور خطی مشتق) به فرم زیر بیان می‌شود:

- 1) $L\{f_1(t) + f_2(t)\} = L\{f_1(t)\} + L\{f_2(t)\}$
- 2) $L\{\alpha f(t)\} = \alpha L\{f(t)\}$

خاصیت اول خطی بودن می گوید؛ لاپلاس مجموع همان مجموع لاپلاس است و دومی می گوید، وجود ضریب اسکالر در عملگری اپراتور لاپلاس تأثیری ندارد.

یک کاربرد عملی این خواص، هنگام لاپلاس گرفتن یک تابع (سیگنال) ترکیبی است. اگر این ترکیب به صورت جمع باشد، آنگاه کافیت تبدیل تک تک جملات را (به جای لاپلاس گیری از کل ترکیب) را جمع بزنیم. به همین شکل اگر سیگنال با یک ضریب ثابتی کوچک (فشرده) شد یا بزرگتر (منبسط) شد، متناظراً و با همان شدت (ضریب)، تبدیل لاپلاس همان تابع نیز کوچک یا بزرگ می شود. این خاصیت و جوهره اصلی در همه مباحث کنترل خطی حضوری پنهان دارد و فعلاً به این مجمل بسنده می کنیم تا در طی درس و جای جای معرفی و مشخصه های این ابزار تحلیلی - طراحی (تبدیل لاپلاس) مفصلاً به آن پردازیم.

۲- خاصیت مشتق. شاید جادوی تبدیل لاپلاس در تحویل یک معادله مشتقی (دیفرانسیل) به یک معادله مائوس جبری در همین خاصیت نهفته باشد. این قضیه (خاصیت) در مقام آنالوژی، شبیه نگاشت لگاریتم است که توان (نمای) یک عدد را به شکل ضریب درمی آورد، یعنی قضیه مشتق تبدیل لاپلاس مراتب مشتق گیری را به صورت چندجمله ای از s در می آورد. معرفی این خاصیت را با مشتق مرتبه اول شروع می کنیم:

$$L\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = L\{\dot{f}(t)\} = sF(s) - f(0)$$

اثبات:

$$\begin{aligned} L\{\dot{f}(t)\} &= \int_{0+}^{\infty} \dot{f}e^{-st} dt = \int_{0+}^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st} dt \\ &= \int_{0+}^{\infty} e^{-st} df = \dots (\text{Integration by part}) \dots = \\ &e^{-st} f(t) \Big|_{0+}^{\infty} - \int_{0+}^{\infty} (-s)e^{-st} f(t) dt = -f(0) + sF(s) \end{aligned}$$

پس به طور خلاصه،

لاپلاس مشتق تابع: حاصلضرب s در لاپلاس تابع منهای مقدار اولیه تابع (در حوزه زمان)

با استقراء می توان مراتب بالاتر مشتق را نیز تحت شمول این قضیه قرار داد:

$$\begin{cases} L\{\ddot{f}(t)\} = s^2 F(s) - sf(t=0) - \dot{f}(t=0) \\ L\{\overset{\cdot\cdot}{f}(t)\} = s^3 F(s) - s^2 f(0) - s\dot{f}(0) - \ddot{f}(0) \end{cases}$$

نکته ۵: در عبارات اخیر تکه اول جملات سمت راست مهم می باشد، یعنی $sF(s)$ یا $s^2 F(s)$ یا...، چرا که می توان با شگردهایی (مثل تغییر متغیر) مقادیر $\dot{f}(0)$ یا $\ddot{f}(0)$ را از بین برد و می ماند یک فرم ساده و بسته از اینکه مشتق مرتبه n ام یک تابع در حوزه زمان معادل است با حاصلضرب توان n ام متغیر s در تبدیل لاپلاس تابع، یعنی نیاز به تبدیل گرفتن از \dot{f} و \ddot{f} بالاتر نداریم، همان تبدیل $f(t)$ (یعنی $F(s)$) کافیت.

استفاده از خاصیت مشتق در حل معادلات دیفرانسیل خطی

جهت طرح اولیه و تمثیلی کاربرد این قضیه و همچنین ایجاد حساسیت ذهنی، با یک مثال انگیزشی بحث قیاسی را تعقیب می کنیم. فرض کنید یک معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت و از مرتبه سوم به شکل زیر در دست است:

$$\begin{cases} y'''' + 4y'' + 5y' + 2y = 2 \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases}$$

جهت محاسبه $y(t)$ از طریق تبدیل لاپلاس باید دو گام اصلی و محوری را دنبال کنیم. گام اول - از طرفین معادله دیفرانسیل تبدیل لاپلاس گرفته و از قضیه مشتق استفاده کنید: پس از بازترکیب:

$$\begin{aligned} s^3 Y(s) - s^2 y(0) - s y'(0) - y''(0) + \\ 4[s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0)] + \\ 5[s Y(s) - y(0)] + \\ 2Y(s) = 2/s \end{aligned}$$

نکته ۶: همانطور که قبلاً ذکر شد، وظیفه (خاصیت مشتق) تبدیل لاپلاس، تبدیل کردن معادله مشتقی مرتبه n ام به یک عبارت جبری و استاتیکی می باشد.

نکته ۷: جهت اتحاد و یکپارچگی با کتب و متون مرجع دو نمادگذاری رایج دیگر نیز وجود دارد. استفاده از نماد $y(s)$ ، به شرطی که آرگومان s که گویای لاپلاسی بودن s باشد! و همچنین تابع $y(t)$ و مشتقاتش در $t = 0$ برابر صفر باشند:

نمادگذاری دیگر با استفاده از کاراکترهای مشخصه مثل کلاه (∧) یا خط تیره (-) در بالای y می باشد، تا بتوان تمایزی بین خود تابع، یعنی $y(t)$ و محصول لاپلاسی آن (یعنی $\{L\{y(t)\}$) قائل شد:

$$\bar{y}(s) \text{ یا } \hat{y}(s) = \frac{2}{s(s^3 + 4s^2 + 5s + 2)}$$

نکته ۸: در لاپلاس گرفتن سمت چپ معادله دیفرانسیل، نمی توانیم از تعریف لاپلاس استفاده کنیم، چون هنوز ساختار یا تابعیت $y(t)$ را نداریم! و به همین خاطر عمل لاپلاس گیری و نتیجه آن را با $Y(s)$ نمایش می دهیم ولی از آن طرف سمت راست را می توانیم لاپلاس بگیریم، چون یک تابع پله به اندازه ۲ واحد است.

گام دوم - حال باید با در دست داشتن $Y(s)$ ، $y(t)$ را حساب کنیم، یعنی به زعمی تبدیل معکوس لاپلاس بگیریم. برای معکوس گرفتن، سعی می کنیم از ابزار ریاضی در دست، استفاده کرده و مسأله را حل کنیم. در اینجا دو راه متصور است، یکی استفاده از قضیه معکوس فوریه و دیگری بهره گیری از جدول ضرب لاپلاس! راه اول نیاز به جزئیات بیشتر ریاضی دارد و منجر به انتگرال گیری های نامعین توابع هموگرافیک (توابع گویا (rational) از چند جمله ای ها در صورت و مخرج) می شود، فلذا از آن صرف نظر کرده و روش دوم را که سازگارتر با رسوم مهندسی (ریاضی کاربردی) می باشد، شرح می کنیم. همانطوری که در دبستان برای محاسبه ضرب های چند رقمی در چند رقمی محتاج یک جدول پایه تک رقمی در تک رقمی بودیم، در اینجا نیز با حفظ کردن تبدیل معکوس چند تابع پایه (پله، شیب، نمایی، سینوسی)، تبدیل معکوس را انجام می دهیم. روال کار براینست که اگر کسرهای ساده ای که بعد از مخرج مشترک گرفتن آنها، به کسر پیچیده حاضر

رسیده‌ایم را می‌دانستیم، آنگاه با توجه به خطی بودن اپراتور لاپلاس می‌توانیم با جمع‌زدن تبدیل معکوس‌های ساده و پایه‌ای به ترکیب اصلی تابع موردنظر برسیم. پس سعی میکنیم کسر گویای حاضر را به کسرهای ساده و پایه تجزیه کنیم.

برای مسأله (مثال) حاضر، باید ابتداً مخرج کسر را به عوامل اول تجزیه کنیم:

با کمی دقت و هوشمندی درمی‌یابیم که (-1) در چند جمله‌ای مخرج صدق می‌کند، پس فاکتور $(s+1)$ چندجمله‌ای را عاد می‌کند. با تقسیم چندجمله‌ای $(s^3 + 4s^2 + 5s + 2)$ بر $(s+1)$ به اتحاد زیر می‌رسیم:

$$(s^3 + 4s^2 + 5s + 2) = (s+1)(s^2 + 3s + 2)$$

مجدداً با کمی دقت، درمی‌یابیم که -2 ، نیز یک ریشه مخرج می‌باشد:

$$(s^3 + 4s^2 + 5s + 2) = (s+1)^2(s+2)$$

بدین ترتیب حدس می‌زنیم که کسر گویای مسأله، یک چنین شکلی قبل از مخرج مشترک داشته است:

$$\frac{2}{s(s^3 + 4s^2 + 5s + 2)} = \frac{2}{s(s+1)^2(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2} + \frac{D}{s+2}$$

حال سؤال اینجاست که ضرایب را چگونه بدست آوریم؟

یک راه حل استاندارد، مخرج مشترک‌گیری و در ادامه متحد قراردادن با ضرایب چندجمله‌ای صورت کسر اولیه می‌باشد:

$$\frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2} + \frac{D}{s+2} = \frac{A(s+1)^2(s+2) + B(s+1)(s+2)s + Cs(s+2) + Ds(s+1)^2}{s(s+1)^2(s+2)}$$

حال اگر صورت را بسط دهیم:

$$\text{صورت کسر} = A(s^3 + 4s^2 + 5s + 2) + Bs(s^2 + 3s + 2) + Cs(s+2) + Ds^2(s+2s+1)$$

و ضرایب چند جمله‌ای را بدست آورده و متحد با چند جمله‌ای اصلی قرار دهیم:

$$(A+B+D)s^3 + (4A+3B+C+2D)s^2 + (5A+2B+2C+D)s + 2A \equiv 0s^3 + 0s^2 + 0s + 2$$

آنگاه به دستگاه چهار معادله، چهار مجهول زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} (A+B+D) = 0 \\ (4A+3B+C+2D) = 0 \\ (5A+2B+2C+D) = 0 \\ 2A = 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{پس از حل دستگاه}} \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \\ C = -2 \\ D = -1 \end{cases}$$

نکته ۹: یک شگرد مهندسی برای محاسبه سریعتر ضرایب (بدون نیاز به حل دستگاه جبری) وجود دارد:

$$Y(s) = \frac{2}{\underbrace{s(s+1)^2(s+2)}_{LH}} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{\underbrace{(s+1)^2}_{RH}} + \frac{D}{s+2}$$

برای محاسبه ضریب، هر دو طرف راست (RH) و چپ (LH) را در s ضرب کرده و مقدار عبارات را در ریشه مخرج A ،

یعنی $s=0$ ارزیابی می‌کنیم:

$$\left. \frac{2}{(s+1)^2(s+2)} \right|_{s=0} = A + \left[\frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2} + \frac{D}{s+2} \right] s \Big|_{s=0}$$

نکته شگرد به وضوح پیداست؛ فقط جمله اول، s ندارد و بقیه دارای فاکتور s هستند که با جایگذاری s معادل صفر، سایر مجهولات (یعنی D, C, B) از گردونه مسأله حذف و خارج می‌شوند.
 بدین ترتیب مقدار A از ارزیابی (LH) ضربدر s در بدست می‌آید. به همین راحتی!

$$\frac{2}{(0+1)^2(0+2)} = A \Rightarrow A = 1$$

اگر همین روال را برای D, C تکرار کنیم:

$$\frac{2}{s(s+1)^2} \Big|_{s=-2} = D \Rightarrow D = -1$$

$$\frac{2}{s(s+2)} \Big|_{s=-1} = C \Rightarrow C = -2$$

ولی برای B ، باید چاره‌ای بیاندیشیم، چون:

$$\frac{2}{s(s+2)} = \frac{A(s+1)^2}{s} + B(s+1) + C + \frac{D}{s+2}(s+1)^2$$

حال اگر دو طرف را در $s = -1$ ارزیابی کنیم، B از دست می‌رود. یک چاره این کار مشتق‌گیری از طرفین است:

$$\frac{-2(2s+2)}{s^2(s+2)^2} = A \left(\frac{2(\dots) - (\dots)}{s^2} \right) + B + 0 + D \frac{\dots}{(s+2)^2}$$

نکته در نکته: عبارات... را تماماً به این شکل نوشتیم تا مؤید این نکته باشد که در مشتق‌گیری (RH) زیاد وسواس به خرج ندهید، چون تا قدمی دیگر صفر می‌شوند. همچنین وقت خود را صرف بسط دادن جملات نکنید، فقط عبارت (LH) را با دقت مشتق بگیرید.

حال عبارت (LH) را در $s = -1$ ارزیابی کنید:

$$\frac{-2(2s+2)}{s^2(s+2)^2} \Big|_{s=-1} = B \Rightarrow B = 0$$

خلاصه و نهایتاً به اینجا رسیده‌ایم:

$$Y(s) = \frac{2}{s(s^3 + 4s^2 + 5s + 2)} = \frac{1}{s} - \frac{2}{(s+1)^2} - \frac{1}{s+2}$$

اگر به جدول ضرب (۱) لاپلاس مراجعه کنیم:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = \underline{u}(t) \quad \text{یا} \quad 1$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} = te^{-t} \underline{u}(t) \quad \text{یا} \quad te^{-t}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)}\right\} = e^{-2t} \underline{u}(t) \quad \text{یا} \quad e^{-2t}$$

جدول ضرب (!) لاپلاس

تابع در حوزه زمان، $f(t)$	تابع در حوزه s ، $F(s)$
تابع دیراک (σ)	1
تابع پله واحد $\underline{u}(t)$	$\frac{1}{s}$
$e^{-\alpha t} \underline{u}(t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$
$t^n e^{-\alpha t} \underline{u}(t)$	$\frac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}}$
$\sin(\omega t) \underline{u}(t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t) \underline{u}(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$

در نتیجه، جواب معادله دیفرانسیل (در حوزه زمان) به شکل زیر درمی آید: $y(t) = (1 - 2te^{-t} - e^{-2t}) \underline{u}(t)$
و یا با علم به اینکه کنتور زمان از صفر شروع می شود: $y(t) = (1 - 2te^{-t} - e^{-2t})$

نکته ۱۰: محاسبه عبارات و تجزیه کسرها یک بحث مهارتی است، لذا به طور کلان مواظب دو حالت استثنایی زیر باشید:
(۱) اگر در مخرج کسر اولیه، ریشه های تکراری داشتید، منتظر توان های t (به عدد تکرار یکی کمتر، توان t دارید) باشید.
(۲) اگر در مخرج کسر اولیه ریشه مختلط داشتید، آنگاه با استفاده از اتحاد مربع کامل یا تجزیه کسر به طریق معمول، عمل تجزیه را انجام داده و تبدیل معکوس بگیرید. به هر طریق که اقدام کردید منتظر توابع تناوبی (سینوسی - کسینوسی) و نمایی در جواب نهایی باشید، فافهم!

خاصیت ۳- قضیه مقدار نهایی: این خاصیت می گوید اگر $F(s)$ را در اختیار دارید، می توانید بدون تبدیل معکوس، یعنی محاسبه $f(t)$ ، مقدار نهایی $f(t)$ را بیابید.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s)$$

نکته ۱۱: بیشترین کاربرد این قضیه، در هنگام محاسبه بهره یکنواخت است، بعداً خواهید دید، فاصبروا!

خاصیت ۴- قضیه مقدار اولیه: این خاصیت می گوید اگر $F(s)$ را در اختیار دارید و نیاز به دانستن مقدار اولیه $f(t)$ دارید، آنگاه نیاز به تبدیل معکوس گرفتن برای محاسبه $f(t=0)$ یا $f(t)|_{t=0}$ نمی باشد.

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s)$$

نکته ۱۲: برای اینکه دو قضیه اخیر را خوب حفظ کنید، به تبدیل ۱ یا $u(t)$ که می شود $\frac{1}{s}$ توجه کنید، انگار $F(s)$ و $f(t)$ تابع پله واحد عکس هم عمل می کنند. به عبارت بهتر متناظران $f(t)$ و $sF(s)$ در مقدار اولیه ($t \rightarrow 0$) در برابر $s \rightarrow \infty$ و مقدار نهایی ($t \rightarrow \infty$) در برابر $s \rightarrow 0$ مثل هم عمل می کنند.

خاصیت ۵- قضیه انتقال تبدیل: این خاصیت، نکته زیبایی دارد و این نکته را اینگونه بیان می کند که شیفت (انتقال) در جواب تبدیل (یعنی $F(s)$)، به منزله میرا کردن است، فافهم!

$$\ell\{e^{-\alpha t} f(t)\} = F(s + \alpha)$$

نکته ۱۳: بسیاری از اقلام وارده در جدول ضرب لاپلاس از این قضیه استفاده کرده اند، به طور مثال $\frac{1}{s}$ دارای تبدیل معکوس $f(t) = u(t)$ می باشد و با توجه به قضیه بالا، تبدیل معکوس $F(s) = \frac{1}{s + \alpha}$ (یعنی همان $\frac{1}{s}$ ولی به اندازه α شیفت کرده است) می شود $f(t) = e^{-\alpha t} u(t)$.

خاصیت ۶- قضیه انتقال تابع: این خاصیت بیان می دارد که جمله نمایی در حوزه s (یعنی $e^{-\tau_d s}$) نشانگر زمان مرده (Dead Time) یا تأخیر انتقالی (Transportation lag) یا زمان تأخیر (Time Delay) یا به زبان ریاضی، انتقال (شیفت) تابع می باشد.

$$L\{f(t - \tau_d)\} = e^{-\tau_d s} F(s)$$

نکته ۱۴: این قضیه به زعمی شگفت آورترین نتیجه ریاضی در کنترل خطی است، به این دلیل که ترم نمایی $e^{-\tau_d s}$ غیرخطی ترین (از نظر ریاضی) و ضرورتی و مهلک ترین (از نظر کنترل فرآیندها) جمله ای است که به این راحتی در کنترل خطی مدل یا بیان می شود. این خاصیت عجیب ریشه در قضیه اوپلر یا تبدیل مختصات کارترین به قطبی دارد:

$$re^{j\theta} = r(\cos \theta + j \sin \theta) \quad , \quad j \triangleq \sqrt{-1}$$

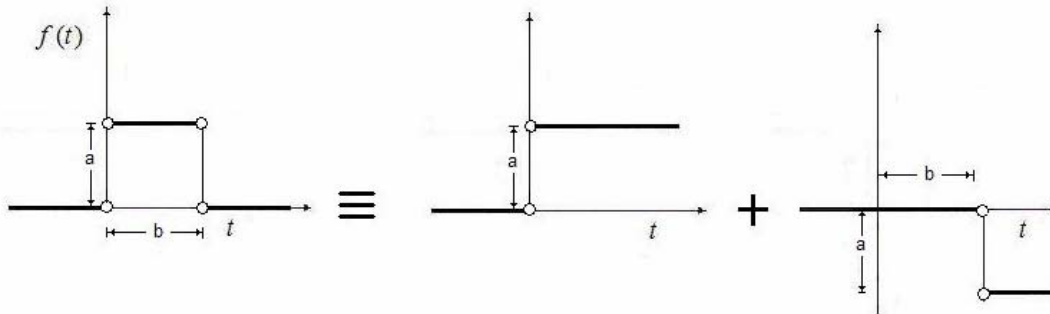
حال با جایگذاری عدد π به جای θ و $r = 1$ داریم:

$$e^{j\pi} = -1$$

رابطه بالا می گوید عدد هندسی (و غیرجبری) نپر (یعنی e) به توان حاصلضرب عدد عجیب الخلقه j که به صورت تعریف شده $\sqrt{-1}$ و عدد هندسی π (که انتها ندارد) رسیده است و جواب شده دقیقاً -1 ، بدون هیچ اعشار و تقریبی!

خاصیت ۷ - تبدیل لاپلاس ضربان (پالس) ایده آل. ابتدا تابع پالس یا ضربان معمولی را تعریف می کنیم. یک تابع ضربان از برهم نهش دو تابع پله بدست می آید. به طور تمثیلی، تابع یک پالس با دامنه a و مدت ($duration$) معادل b ، به صورت زیر تعریف می شود (به شکل ۵ نیز مراجعه کنید):

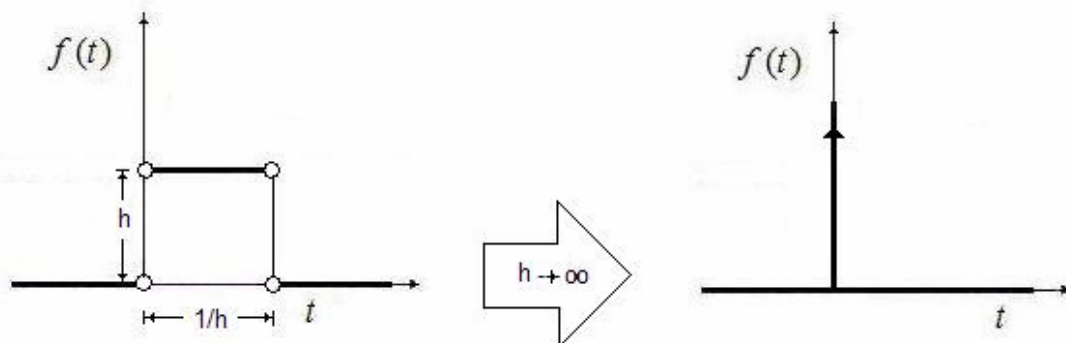
$$pulse[a,b](= f(t)) = au(t) + (-au(t-b)) = a[u(t) - u(t-b)]$$



شکل ۵. نمایش تابع ضربان.

حال برای ساختن یک پالس ایده آل، از روی تعریف آن اقدام می کنیم:

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} pulse\left[\frac{1}{h}, h\right] dt = 1$$



شکل ۶. نمایش تابع ضربان ایده آل.

یعنی پالس ایده آل ضربانی با دامنه $\frac{1}{h}$ و مدت h می باشد به طوری که ارتفاع آن (یعنی $\frac{1}{h}$) بی نهایت بوده و دوره (مدت) آن بسیار کوچک باشد تا وجه تسمیه ضربه یا ضربان صادق بماند. دقت کنید سطح زیر منحنی همچنان ۱ باقی می ماند

(چون $1/h \times h = 1$). بدین تعریف تابع دیراک یا ضربان ایده آل بر مبنای برهم نهش توابع پله به شکل زیر خواهد بود: (به شکل ۶ مراجعه کنید)

$$\delta(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h} \right) [u(t) - u(t-h)]$$

برای محاسبه تبدیل لاپلاس تابع دیراک، کفایت از بیان پالسی تابع، تبدیل بگیریم:

$$\begin{aligned} L\{\delta(t)\} &= L\left\{ \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h} \right) [u(t) - u(t-h)] \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h} \frac{1 - e^{-hs}}{s} \right) = \left(\frac{0}{0}, L' Hopital \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{se^{-hs}}{h} \right) = 1 \end{aligned}$$

خاصیت ۸- تبدیل انتگرال. این خاصیت از عمل کردن معکوس قضیه مشتق به راحتی بدست می آید:

$$L\left\{ \int_0^t f(t) dt \right\} = F(s) / s$$

به طوریکه $F(s) = L\{f(t)\}$.

مقدمه:

یک فرق اساسی بین علوم قدیمه و جدیده، به ویژه علوم مهندسی و تکنولوژیک، نحوه بیان و عبارت یابی همه مؤلفه های عامل و معرفت شناختی یک نظام یا سیستم تحت مطالعه می باشد. این بدین معنی است که در علوم قدیمه، نسبتاً به دنبال توجیه و بیان پدیده ها در قالب دلیل-مدلول و بالطبع با سیاق کیفی بوده و در حالیکه در علوم جدیده، به ویژه بعد از جنگ جهانی دوم، دست اندرکاران علوم مهندسی به دنبال توجیه و بیان پدیده ها در قالب علت-معلول و بالاجبار (به خاطر تحلیل و نظرات نیوتن) با سیاق کمی و عددی می باشند. بحث و بیان پدیده ها در یک قالب تحلیلی-عددی موسوم به فرمولاسیون روابط یا مدل سازی به مفهوم کسب دانش و آگاهی عمیق تری می باشد. تقسیم بندی انواع مدل سازی و به زعمی متدولوژی فرمولاسیون های بیانگر پدیده های طبیعی دارای وجوه مختلفی می باشد. در ادامه به تقسیم بندی روش های فرمولاسیون می پردازیم (به شکل ۱ مستمرا مراجعه کنید).

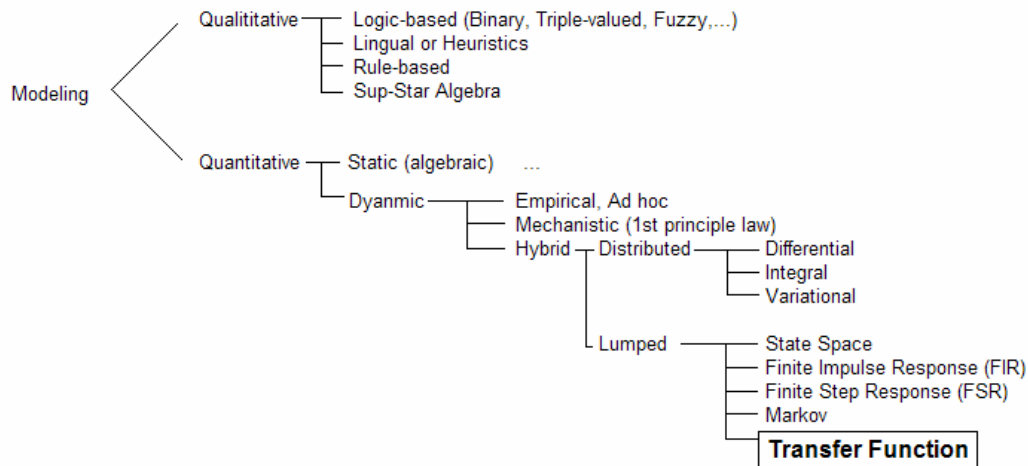
انواع مدل سازی به وجه نوع بیان - همانطور که از پیش گفته شد، دو نوع بیان کیفی و کمی داریم. در بیان کیفی علوم جدیده معمولاً از ادبیات منطق (Logic)، قواعد کلامی (Heuristics)، مجموعه قواعد حکمی (Rule-Based) و جبر کیفی (Sup-star Algebra) استفاده می شود. این مباحث در حوصله این درس نیست و به آنها نمی پردازیم. در عوض، آنچه که مقتضی این درس می باشد همانا مدل سازی کمی و تحلیلی می باشد.

انواع مدل سازی به وجه جبری یا مشتقی بودن - اگر در روابط تعیین شده، مقادیر مشتق متغیر تابع (توابع) وجود داشته باشد، حل مساله سخت تر می شود. اگر شبیه سازی (به قصد اهداف طراحی) را مرکب از دو فاز متوالی فرمولاسیون و حل بدانیم، آنگاه مدل سازی های استاتیکی و دینامیکی خیلی با هم فرق ندارند ولی هنگام حل و مشخصه سازی در حالت دینامیکی به مراتب سخت تر خواهند بود.

انواع مدل سازی به وجه منشأ انتزاع ذهنی - اگر در روابط دست اندرکار، به خاطر پیچیدگی و عدم قطعیت موجود در شرح پدیده های روابط فیزیکی و شیمیایی ناظر به مشاهدات تجربی و یا آماری باشند، آنگاه فرمولاسیون مسأله، رنگ و لعاب آماری و تجربی به خود می گیرد. نمونه شمارشی شیر یا خط (مدل سازی وقوع یا نتیجه پرتاب سکه) که با احتمالات سروکار دارد یا روابط تجربی ضریب انتقال حرارت (تابعیت Nu با Re و Pr) مصادیق تمثیلی این نحوه از مدل سازی هستند.

در طرف مقابل، اگر ارتباط بین کمیات مسأله در قالب قوانین عام طبیعی (بقای جرم و بقای انرژی) باشد، آنگاه با مدل سازی مبتنی بر قوانین اولیه سر و کار داریم. اگر این نحوه از فرمولاسیون را با روش قبلی (تجربی) مقایسه کنیم، دارای بار اطلاعاتی بیشتر و قابلیت تعبیر فیزیکی می باشند، به طوریکه فرمولاسیون های تجربی از قدرت بسیار ضعیفی در برون یابی نتایج دارند. به هر حال، آن چه که رواج دارد، فرمولاسیون ترکیبی یا هیبرید می باشد، به طوریکه معادلات حاکم فرمولاسیون (Governing Equation)، ترکیبی متناسب از قوانین عام (مثل قوانین ترمودینامیکی) و قوانین خاص تجربی (مثل قانون هدایت فوریه) می باشند.

انواع مدل سازی دینامیکی و هیبرید به زعم توزیع جغرافیایی - اگر کمّیات مساله دارای فرض توزیع جغرافیایی (بر حسب متغیرهای مکانی مثل (z, y, x) یا (z, θ, r)) باشند، آنگاه با فرمولاسیون و متدولوژی توزیعی (Distributed) روبرو هستیم ولی اگر تنها متغیر مستقل مساله، زمان باشد، آنگاه با یک مساله متوسط گیری شده (Lumped) روبرو هستیم. در این درس، فرض می کنیم حوزه فرمولاسیون مسائل، همان متدولوژی متوسط گیری شده و فله ای (bulk) جاری و برقرار باشد و از ذکر جزئیات انواع فرمولاسیون توزیعی پرهیز می کنیم.



شکل ۱. تقسیم بندی انواع رویکردهای مدل سازی.

انواع مدل سازی دینامیکی، هیبرید و متوسط گیری شده - اگر مدل دینامیکی سیستم را با یک معادله دیفرانسیل عادی مرتبه چندم یا یک دستگاه معادلات دیفرانسیل عادی مرتبه اول نشان دهیم، آنگاه به اصطلاح ریاضی، با فرمولاسیون فضای حالت (state - space) روبرو هستیم و اگر به صورت سری زمانی نمایش هستیم، با فرمولاسیون مارکوف (Markov) روبرو هستیم. اگر مدل سازی به فرم دنباله ای از پاسخ های ضربان (Finite Impulse Response - FIR) و پله (Finite Step Response - FSR) نمایش دهیم، آنگاه انواع دیگری از تحقق فیزیک مساله را با بیان ریاضی به نمایش گذاشته ایم. اگر بخواهیم این نمایش را به صورت یک مدل تحریک - پاسخ یا ورودی / خروجی (در قاموس مهندس اطلاعات) نمایش دهیم، باید با توابع انتقال کار کنیم. یک عیب این کار، علاوه بر نیاز به خطی سازی (بعداً توضیح داده می شود)، قید کار کردن در حوزه (s) (معروف به حوزه فرکانس) می باشد، یعنی مثل اکثریت بقیه مدل سازی های پیش گفته که در حوزه زمان (t) کار می کنند، مجبوریم با تبدیل لاپلاس کار کنیم. نکته قابل توجه و البته توفیق اجباری این نحوه نگرش، نزدیک بودن ساختار این نوع مدل سازی با مدل سازی جبری و استاتیکی (و مانوس به ذهن) می باشد. راجع به این نکته و انگیزه استفاده از این روش، به طور مفصل در ادامه درس بحث خواهد شد ولی به طور مختصر، معیار و خط کش انتخاب هر کدام از روش های بالا، مشخصاً ابزار طراحی و اقتضائات تحلیل مساله می باشد و از آنجایی که در کنترل کلاسیک، مباحث تحلیلی و همچنین طراحی به کمک تبدیل لاپلاس صورت می پذیرد، استفاده از توابع انتقال عملاً امری اجتناب ناپذیر خواهد بود.

مثال: مدل‌سازی رفتار دینامیکی دماسنج جیوه‌ای مبتنی بر قوانین اولیه (Mechanistic)

صورت مساله و ضرورت وجودی طرح این مساله به شکل زیر است:

می‌خواهیم بدون استفاده از آزمایش (تجربه) و فقط با بهره‌گیری از قلم و کاغذ و دانسته‌های مهندسی بدانیم اگر یک دماسنج جیوه‌ای را به‌طور ناگهانی از حالت یکنواخت در $(T_{\infty,SS}^{(1)})$ به محیط دیگری با دمای $(T_{\infty,SS}^{(2)})$ ببریم، آنگاه ارتفاع جیوه یا دمای مشاهده شده (T_m) چگونه با زمان تغییر می‌کند؟ آیا خطی رشد یا نزول می‌کند، آیا همراه با نوسان است، آیا ...؟

برای فرمولاسیون مساله براساس قوانین اولیه، ابتدا فرضیات و نکات مهندسی اولیه زیر را در نظر می‌گیریم:

۱- به خاطر ساینز کوچک و آرایش هندسی حباب دماسنج در برابر مقیاس مساله و همچنین هدایت حرارتی بالای جیوه، فرض می‌کنیم سیستم به صورت متوسط‌گیری شد (Lumped) عمل می‌کند، یعنی هیچ توزیع جغرافیایی از (T_m) نداریم و به عبارتی (T_m) در جای جای حباب یک عدد است و تابعیتی با مثلاً شعاع یا محور یا زاویه در حباب ندارد. شایان ذکر است که (T_m) با مختصات فضایی عوض نمی‌شود، بلکه فقط با زمان عوض می‌شود.

۲- مدل نهایی (معادلات حاکم) باید شامل $(d/dt)^n$ باشد تا دینامیک و اینرسی داشته باشد. به عبارتی باید یک روند تکاملی و نه جهشی را طی کند. از نظر ریاضی سیستم‌های جهشی که در زمان نامرئی کار می‌کنند موسوم به سیستم‌های جبری هستند. به طور طبیعی هم، همین رفتار را می‌بینیم و حس می‌کنیم؛ ارتفاع ستون جیوه در اثر جابجا کردن دماسنج از یک محیط سرد به یک محیط گرم، همیشه با یک تدریج و تکامل بطنی همراه است و بلافاصله دمای محیط جدید را مشاهده نمی‌کنیم، بلکه این مشاهده در ظرف زمان رخ داده و باید کمی صبر کنیم تا حالت یکنواخت جدید را بدست آورد.

۳- فرض می‌کنیم دیواره شیشه‌ای حباب و دماسنج آنقدر نازک است که نیاز به در نظر گرفتن دو مدیای حرارتی نباشد ولی آنقدر ضخیم است یا دارای هدایت حرارتی اندک (عایق) است که بتوانیم مقاومت حرارتی داشته باشیم.

۴- فرض می‌کنیم دیواره شیشه‌ای منبسط یا منقبض نمی‌شود، یعنی سطح اینترفیس انتقال حرارت عوض نمی‌شود.

۵- ظرفیت حرارتی جیوه، متوسط‌گیری شده و با دما و زمان عوض نمی‌شود.

۶- فرض می‌کنیم تئوری فیلمی (ضریب انتقال حرارت کونوکتیو) برای انتقال حرارت حاکم باشد.

با نوشتن موازنه انرژی (به عنوان قانون عام) و استفاده از قانون خاص تبرید نیوتن (رابطه انتقال حرارت اینترفیس یا کونوکتیو):

$$hA(T_{\infty} - T_m) = mC_p \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{T_m|_{t+\Delta t} - T_m|_t}{\Delta t}$$

بعد از حدگیری به مدل (Lumped) زیر می‌رسیم:

$$mC_p \frac{dT_m}{dt} = hA(T_{\infty} - T_m)$$

نکته ۱: خبری از متغیرهای مستقل جغرافیایی نظیر γ, x, θ, r نیست. علت اینست که فرمولاسیون (Lumped) است.

نکته ۲: تنها متغیر مستقل، زمان یا (t) است.

نکته ۳: الان در مقام فرمولاسیون هستیم. اگر بخواهیم شبیه‌سازی انجام دهیم، باید جامه حل بیوشیم، یعنی کفایت نحوه تغییرات T_{∞} با زمان را بدانیم، سپس معادله دیفرانسیل بالا را حل کنیم. دقت کنید اگر فرض کنیم

پارمترهای m, C_p, h, A ثابت باشند، تنها متغیر تاثیر گذار (یا به لسان کنترل، متغیر ورودی)، همان T_∞ است و تنها متغیر تاثیر پذیر (به لسان کنترل، متغیر خروجی)، همان کمیت ديفرانسیلی T_m می باشد.

نکته ۴: الان بر سر دو راهی هستیم، اگر شروع به حل کنیم، عملاً مساله دینامیک دماسنج را شبیه سازی کرده ایم ولی اگر سیاق کنترلی را حفظ کنیم، یعنی به تحلیل و مطالعه و شناخت پردازیم، نباید مساله را حل کنیم. فقط باید کمی آرایش آن را عوض کرده به طوریکه بتوانیم مساله را مشخصه سازی کرده و دینامیک آن را معرفی کنیم. در ادامه باید محض سهولت و تناسب بحث تحلیلی، فرمولاسیون اخیر را که منشا فرمولاسیون مبتنی بر قوانین اولیه دارد، کمی باز آرایشی کنیم. ابتدا متغیر انحرافی یعنی فاصله با مقدار یکنواخت قدیم یا جدید را طرح می کنیم:

در حالت یکنواخت، $d/dt = 0$ است، در نتیجه

$$hA(T_{\infty,ss} - T_{m,ss}) = 0 \Rightarrow T_{\infty,ss} = T_{m,ss}$$

حال، متغیرهای انحرافی زیر را تعریف می کنیم:

$$\bar{T}_m = T_m - T_{m,ss} \quad , \quad \bar{T}_\infty = T_\infty - T_{\infty,ss}$$

دو معادله ديفرانسیل و جبری را از هم کم می کنیم تا به شکل زیر در آید:

$$mC_p \frac{d\bar{T}_m}{dt} = hA(\bar{T}_\infty - \bar{T}_m)$$

سیستم را به نحوی مقیاس گذاری کرده و دارای تعبیر فیزیکی می کنیم، به طور مثال:

$$\tau = \frac{mC_p}{hA} \equiv \text{ظرفیت انتقال / ظرفیت انباشت}$$

یعنی پارامتر τ که گذر از ریاضی به فیزیک است، معرف رقابت بین استعداد یا ظرفیت انباشت (به نمایندگی m, C_p) و استعداد یا سرعت انتقال (به نمایندگی h, A) می باشد.

نکته ۵: عطف عبارات (استفاده از " و ") در عالم مهندسی را می توان عادتاً به صورت حاصلضرب نوشت، فافهم!

حالا معادله ديفرانسیل بالا را بر حسب τ می نویسیم:

$$\tau \frac{d\bar{T}_m}{dt} = (\bar{T}_\infty - \bar{T}_m) \rightarrow \tau \frac{d\bar{T}_m}{dt} + \bar{T}_m = \bar{T}_\infty$$

معادله ديفرانسیل (در حوزه t) کمی شکل بسته و قابل تعبیر گرفت. مثلاً فرض کنید τ خیلی کوچک باشد، یعنی یا ظرفیت انباشت کوچک باشد یا سرعت انتقال حرارت بالا باشد (مثلاً خیلی شدید سیستم را هم بزینم) آنگاه معادله

$$\text{ديفرانسیل بالا شکل جبری} \quad \bar{T}_m = \bar{T}_\infty \quad \text{به خود می گیرد!}$$

$$\tau s \bar{T}_m(s) + \bar{T}_m(s) = \bar{T}_\infty(s) \quad \text{حالا فرض کنید از طرفین معادله بالا، تبدیل لاپلاس بگیریم:}$$

نکته ۶: علت استفاده از متغیر انحرافی را حتماً فهمیده اید، چون طبق قضیه مشتق، باید جمله $\bar{T}_m(t=0)$ را باید می دیدیم که چون \bar{T}_m متغیر انحرافی است، لذا مقدار اولیه آن صفر است.

با باز ترکیب رابطه اخیر:

$$\frac{\bar{T}_m(s)}{\bar{T}_\infty(s)} = \frac{1}{\tau s + 1} \equiv G_p(s)$$

در اینجا به اوج منزلت و شان تبدیل لاپلاس در نحوه بیان و فرمولاسیون یک معادله ديفرانسیل می رسیم. این مقامیست که یک معادله ديفرانسیل، به صورت جبری بیان می شود! قابل تعبیر هم هست. اگر $\bar{T}_m(s)$ را خروجی یا تاثیر پذیر

بگیریم، انگار $\bar{T}_\infty(s)$ (یا همان ورودی یا تاثیرگذار) توسط ضریب یا بهره $G_p(s)$ بزرگ یا کوچک شده و منجر به $G_p(s)$ در طول زمان می‌شود:

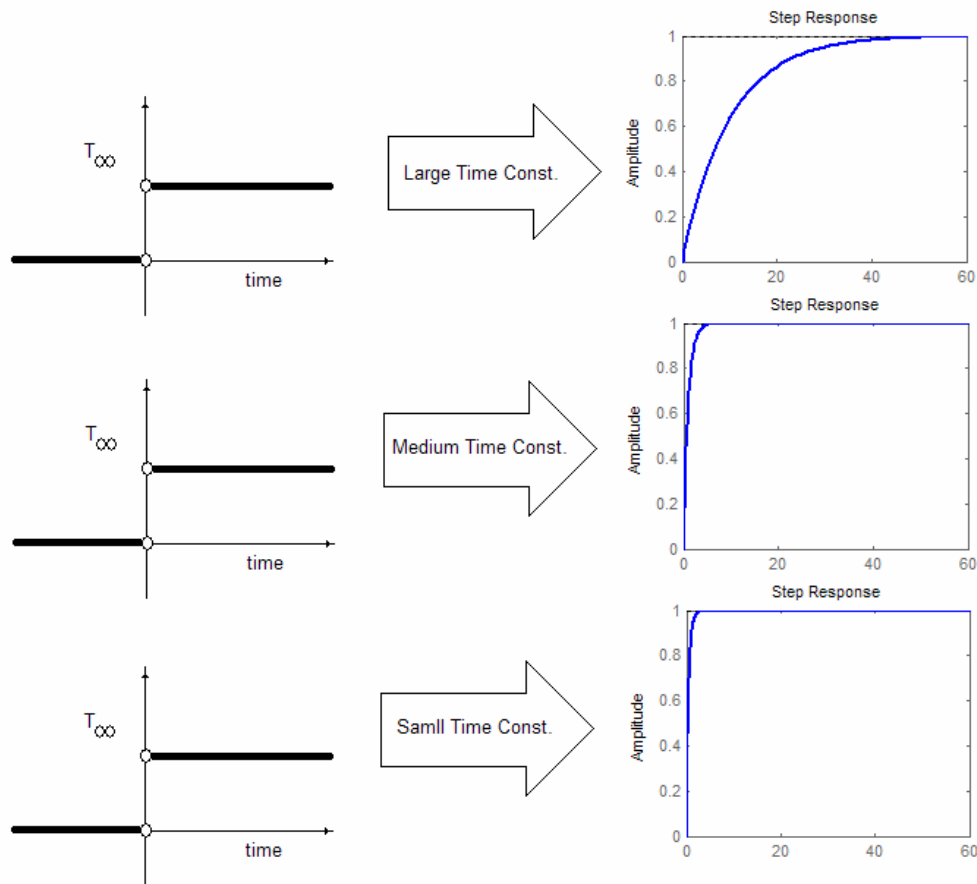
$$\bar{T}_m(s) = G_p(s) \cdot \bar{T}_\infty(s)$$

نکته ۷: وجه تسمیه G ، به خاطر اینست که حرف اول $Gain$ یا بهره است.

نکته ۸: اگر سیستم جبری بود، آنگاه G همان شیب خط است! فافهم.

نکته ۹: به عبارت کسری یا گویای G_p (rational) می‌گویند تابع انتقال (Transfer Function) و نه تبدیل (Transform).

نکته ۱۰: τ یک مشخصه رفتار دینامیکی است. اگر τ خیلی کوچک باشد. جمله τs در برابر ۱ (جمله مخرج) بسیار کوچک می‌شود و در نتیجه s (معرف مشتق خروجی) انگار وجود ندارد، یعنی سیستم جبری می‌شود. دقت شود قبل از حل داریم این صحبت را می‌کنیم. به شکل ۲ مراجعه کنید.



شکل ۲. رفتار یک سیستم درجه اول برای ثوابت زمانی مختلف.

خواص و نکات مرتبط با توابع انتقال

۱- هر سیستم فیزیکی که در آن رابطه تبدیل‌های لاپلاس متغیرهای انحراف ورودی و خروجی به شکل رابطه $\frac{k}{\tau s + 1}$ باشد، سیستم درجه اول نامیده می‌شود. مترادف‌های آن موسوم به پسی یا تاخیر درجه اول (First Order Lag) و مرحله تک نمایی می‌باشند.

۲- چون توابع انتقال مورد مصرف ما برای مدل‌سازی سیستم‌های فیزیکی می‌باشد، لذا درجه صورت حداقل یکی کمتر از درجه مخرج می‌باشد. فتامل!

۳- استفاده از متغیرهای انحراف، راحت و طبیعی است. ما همیشه از آن استفاده می‌کنیم. شایان ذکر است که برای سیستم‌های ناپوسته (batch) انتخاب حالت یکنواخت سخت است، فافهم!

۴- برای پاسخ سیستم (یعنی حل و شبیه سازی) $\bar{Y}(s) = G_p(s) \cdot \bar{u}(s)$ باید $G_p(s)$ معلوم باشد. و $\bar{u}(s)$ داده شود، آنگاه از $\bar{Y}(s)$ تبدیل معکوس می‌گیریم.

۵- اصولاً یک تابع انتقال تک ورودی - تک خروجی، دو متغیر فرآیند را در حوزه S به هم مربوط می‌سازد. یکی از اینها علت، تابع محرک، متغیر ورودی (در صورت مدار بسته، متغیر تنظیم کننده یا کنترل کننده) نام دارد و دیگری معلول، اثر، پاسخ یا متغیر خروجی (که معمولاً برای اهداف مانتورینگ و کنترل، اندازه گیری می‌شود) نام دارد.

۶- چون مدل سیستم خطی است، می‌توان از اصل برهم نهش (Superposition) استفاده کرد، یعنی اگر ساختار ورودی به شکل زیر باشد:

$$\bar{u}(s) = a_1 \bar{u}_1(s) + a_2 \bar{u}_2(s)$$

آنگاه پاسخ سیستم به صورت زیر خواهد بود:

$$\bar{Y}(s) = G_p(s) \cdot \bar{u}(s) = a_1 \bar{Y}_1(s) + a_2 \bar{Y}_2(s)$$

به طوریکه \bar{Y}_1 و \bar{Y}_2 پاسخ‌های مربوط به \bar{u}_1 و \bar{u}_2 هستند.

به طور مثال (دماسنج)، پاسخ به تغییر دمای محیط به اندازه $10^\circ C$ ، دو برابر پاسخ به متغیر دمای محیط به اندازه $5^\circ C$ می‌باشد.

۷- پاسخ پله سیستم‌های درجه اول: اگر تابع محرک (ورودی) به صورت پله باشد:

$$\bar{u}(t) = 1 \times u(t) \rightarrow \bar{u}(s) = A/s$$

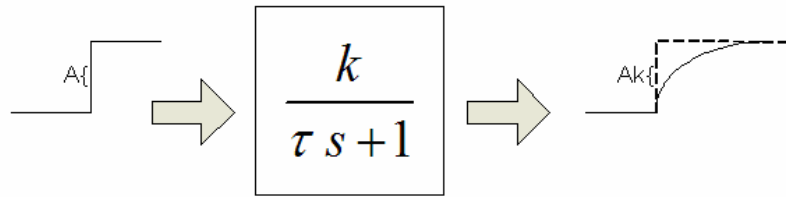
آنگاه برای سیستم درجه اول $G_p(s) = \frac{k}{\tau s + 1}$ پاسخ خروجی (در دامنه لاپلاس) به شکل زیر است:

$$G_p(s) = \frac{k}{\tau s + 1} = \frac{\bar{Y}(s)}{\bar{u}(s)} \rightarrow \bar{Y}(s) = \frac{k}{\tau s + 1} \cdot \bar{u}(s) = \frac{kA}{s(\tau s + 1)}$$

پاسخ خروجی در دامنه زمان (یعنی حل معادله دیفرانسیل) با استفاده از تکنیک‌های فرا گرفته شده از قبل به صورت زیر می‌باشد:

$$L^{-1}\{Y(s)\} = \bar{Y}(t) = Ak(1 - e^{-t/\tau})$$

به طور گرافیکی، این اتفاق افتاده است (شکل ۳)



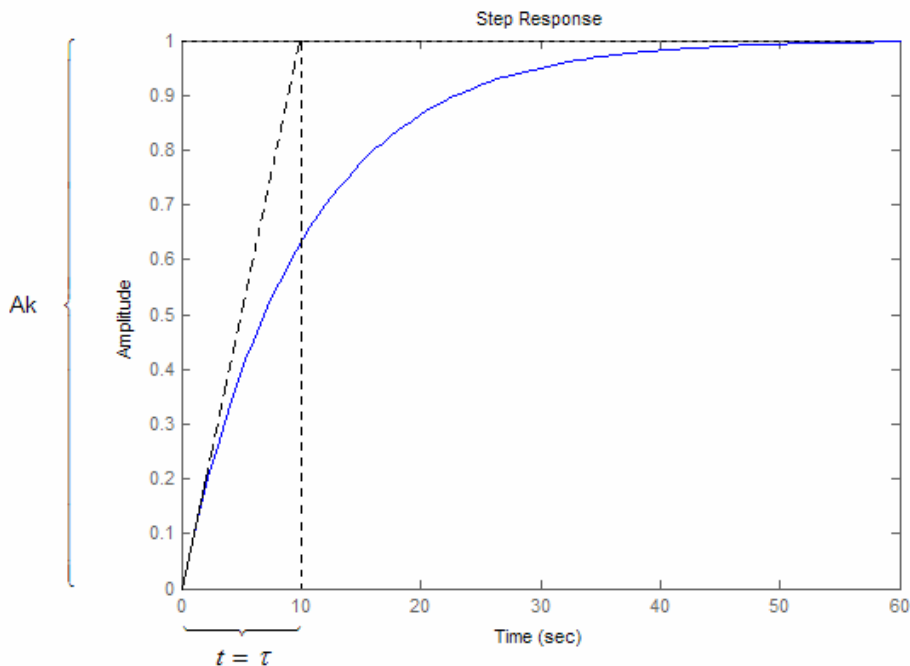
شکل ۳. پاسخ پله یک سیستم درجه اول.

حالا به خواص مهندسی و سرانگشتی مرتبط می‌پردازیم:

الف) اگر τ خیلی کوچک باشد، سیستم از حالت دینامیکی به حالت جبری میل می‌کند، یعنی به جای رفتار تکاملی، رفتار جهشی نشان می‌دهد و قیافه خروجی مثل قیافه ورودی شبیه پله می‌شود.

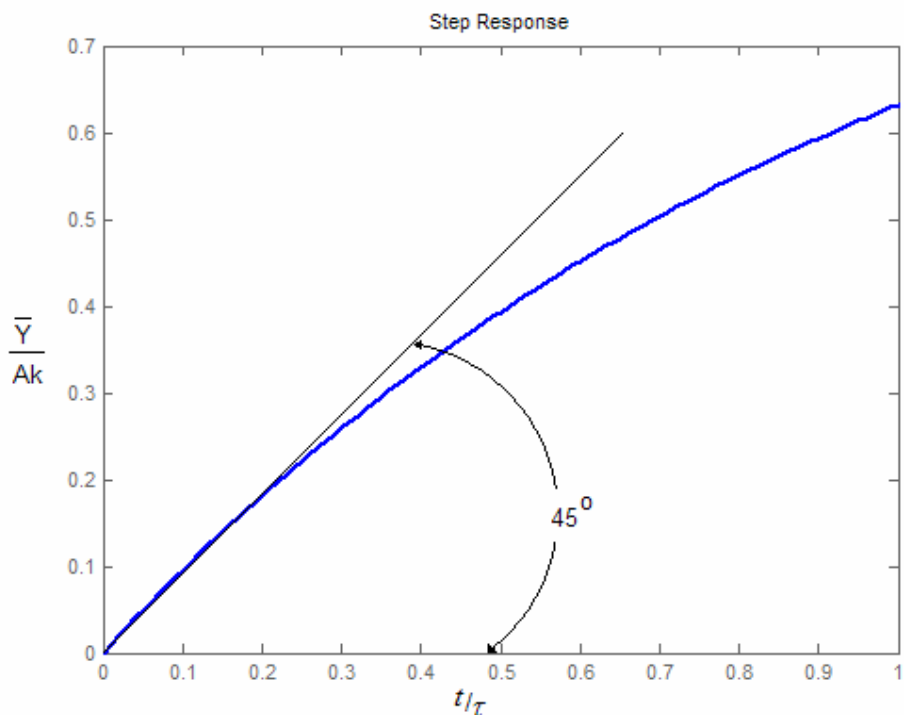
ب) با گذشتن زمانی برابر یک ثابت زمانی، مقدار $\bar{Y}(t)$ به 63.2% مقدار نهایی خود می‌رسد. پس از چهار ثابت زمانی (یعنی $t = 4\tau$)، مقدار $\bar{Y}(t)$ به 98% مقدار نهایی می‌رسد. این عدد 4τ یا 5τ را به خاطر بسپارید، چون زمان استقرار سیستم، یعنی زمانی که طول می‌کشد که سیستم درجه اول از مقدار یکنواخت قدیم خود به مقدار یکنواخت جدید خود در اثر تحریک پله برسد.

ج) اگر سیستم دینامیک درجه اول نداشت و با همان شیبی که پاسخ $\bar{Y}(t)$ شروع کرده بود، ادامه می‌داد، در زمان $t = \tau$ به مقدار نهایی خود می‌رسید! (به شکل ۴ مراجعه کنید).



شکل ۴. رفتار یک سیستم درجه اول برای تغییر پله در ورودی.

(د) شیب منحنی پاسخ مقیاس شده در مبدا، معادل واحد است! (به شکل ۵ مراجعه کنید).



شکل ۵. رفتار مقیاس شده یک سیستم درجه اول برای تغییر پله در ورودی.

(ه) برای محاسبه بهره حالت یکنواخت، باید ابتدا مقدار نهایی $\bar{Y}(t)$ را بدانیم:

$$\bar{Y}_{ss, new} = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{Y}(t)$$

پس از تعریف بهره حالت یکنواخت:

$$\text{بهره حالت یکنواخت یا (D.C.Gain)} = \frac{\Delta Y}{\Delta u} = \frac{\Delta \bar{Y}}{\Delta u} = \frac{\bar{Y}_{ss, new} - \bar{Y}_{ss, old}}{u_{ss, new} - u_{ss, old}}$$

استفاده کرده و مقادیر مربوط را جاگذاری می کنیم:

$$\text{بهره حالت یکنواخت} = \frac{\bar{Y}_{ss, new} - 0}{A - 0} = \frac{\bar{Y}_{ss, new}}{A} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Ak(1 - e^{-t/\tau})}{A} = \frac{Ak}{A} = k$$

یعنی k موجود در G_p عملاً میزان بزرگ شدن نهایی خروجی نسبت به میزان بزرگی پله ورودی را نمایش می دهد.

محاسبات بالا را می توان بدون حل (یعنی استفاده از $Ak(1 - e^{-t/\tau})$) بدست آورد!

برای اینکار از قضیه مقدار نهایی استفاده کنید و مقدار نهایی $Y(t)$ را بدست آورید:

$$\bar{Y}_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} sF(s) = s\bar{Y}(s) = s \cdot \frac{kA}{s(\tau s + 1)} \Big|_{s=0} = kA$$

حالا اگر این مقدار را در تعریف بهره حالت یکنواخت بگذاریم، به همان مقدار k می رسیم.

به عنوان یک فرمول کلی، مقدار نهایی خروجی به ازای تغییر پله واحد ($A = 1$)، همان بهره حالت یکنواخت است و از فرمول زیر (استفاده ابزاری از $G_p(s)$) بدست می‌آید:

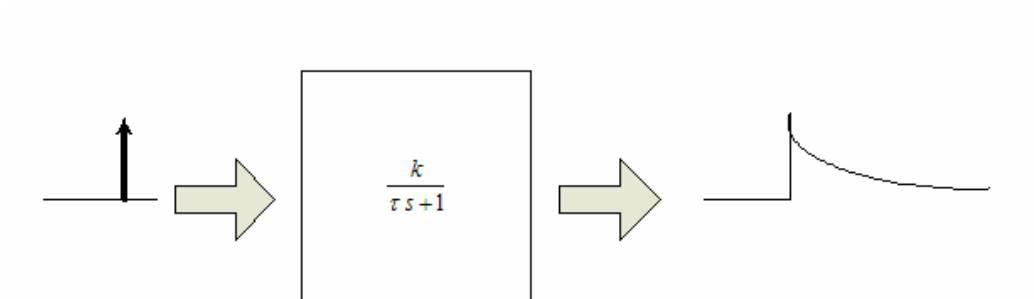
$$\text{بهره حالت یکنواخت} = \frac{\Delta Y}{\Delta u} = G_p(0)$$

۸- پاسخ ضربان ایده‌آل سیستم‌های درجه اول

$$\bar{u}(s) = 1 \rightarrow \bar{Y}(s) = \frac{k}{\tau s + 1} \rightarrow \bar{Y}(s) = \frac{k/\tau}{s + 1/\tau} \rightarrow$$

$$\bar{Y}(t) = L^{-1}\{\bar{Y}(s)\} = (k/\tau)e^{-t/\tau}$$

برای احساس فیزیکی، به شکل ۶ مراجعه کنید.



شکل ۶. رفتار یک سیستم درجه اول برای تغییر ضربان ایده‌آل در ورودی.

یک نکته سرانگشتی در این رابطه وجود دارد و آن هم استفاده از قضیه مشتق است.

$$\bar{Y}(s)_{\text{impulse}} = \frac{k}{\tau s + 1} = s \cdot \frac{k}{s(\tau s + 1)} = s \bar{Y}(s)_{\text{step}} \rightarrow \bar{Y}(t)_{\text{impulse}} = d(\bar{Y}(t)_{\text{step}}) / dt$$

یعنی همان جواب را از مشتق گرفتن پاسخ پله هم می‌توانستیم بگیریم!

۹- پاسخ سینوسی سیستم‌های درجه اول:

$$\bar{u}(t) = A \sin(\omega t) \rightarrow \bar{u}(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \rightarrow \bar{Y}(s) = \frac{k}{\tau s + 1} \cdot \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\bar{Y}(t) = L^{-1}\{\bar{Y}(s)\} = \frac{A\omega\tau k}{\tau^2\omega^2 + 1} e^{-t/\tau} - \frac{A\omega\tau k}{\tau^2\omega^2 + 1} \cos(\omega t) + \frac{Ak}{\tau^2\omega^2 + 1} \sin(\omega t)$$

برای ساده تر کردن پاسخ، از اتحاد مثلثاتی زیر استفاده می‌کنیم:

$$p \cos(A) + q \sin(A) = r \sin(A + \theta)$$

$$r = \sqrt{p^2 + q^2}, \quad \tan \theta = p/q$$

در نتیجه پاسخ به فرم بسته زیر درمی‌آید:

$$\bar{Y}(t) = \frac{A\omega\tau k}{\tau^2\omega^2 + 1} e^{-t/\tau} + \frac{Ak}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}} \sin(\omega t + \phi)$$

$$\phi = \tan^{-1}(-\omega\tau)$$

نکته‌های زیر همگی قابل تامل هستند:

الف - پاسخ حالت ماندگار: (چون ترم اول بعد از زمان نسبتاً کوتاهی از بین می‌رود)

$$\bar{Y}(t)\Big|_{t \rightarrow \infty} = \frac{Ak}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} \sin(\omega t + \phi)$$

ب - چرا نمی‌توان از قضیه مقدار نهایی استفاده کرد؟

ج - به ساختار حالت ماندگار دقت کنید:

اولاً) دامنه خروجی به ازای بهره واحد با فاکتور $\frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}}$ کوچک شده است.

ثانیاً) خروجی نسبت به ورودی تاخیر فاز دارد، چون ϕ همیشه منفی است، یعنی خروجی عقب‌تر است و همیشه ورودی را با همان فرکانس تعقیب می‌کند. این همان مساله و وجه تسمیه علی بودن است، فافهم.

ثالثاً) ϕ از جنس رادیان است، چون جبری می‌باشد، نه زاویه یا گرادیان!

مقدمه

در ادامه مدل‌سازی مبتنی بر قوانین اولیه، در این بخش به فرمولاسیون سیستم‌های فرآیندی و غیرفرآیندی که رفتار دینامیکی غالب آن درجه اول است می‌پردازیم. لازم به ذکر است که غرض و هدف اصلی بدست آوردن تابع انتقال این سیستم‌ها می‌باشد ولی از آنجائیکه این توابع انتقال در قالب معادلات دیفرانسیل خطی ولی در فضای لاپلاس بیان می‌شوند، لذا می‌بایستی خطی باشند. متأسفانه در طبیعت سیستم خطی وجود ندارد مگر اینکه با یک مجموعه فرضیات ساده شونده فیزیکی (مثل مساله دینامیک دماسنج جیوه‌ای) یا ریاضی (مثل برخی مسائل این بخش) آنها را خطی در نظر بگیریم.

سیستم سطح مایع

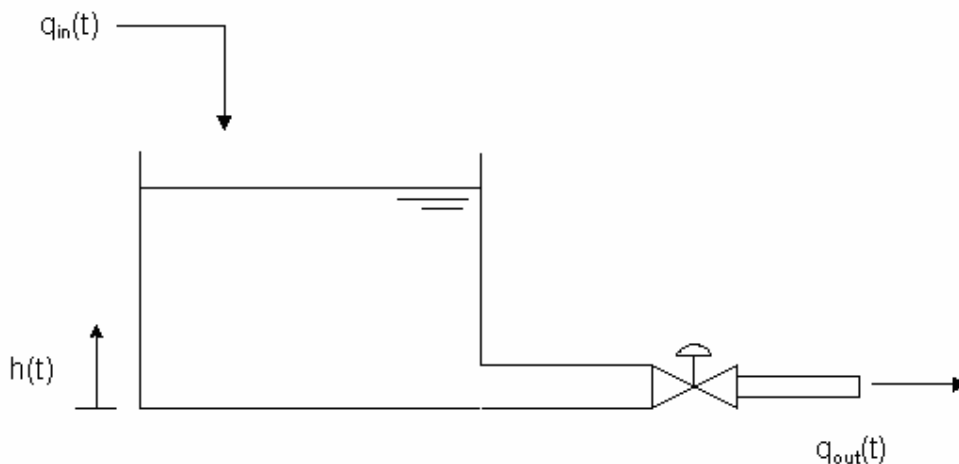
قبل از مدل کردن، باید کمی سیستم را احساس کرد، مبادی و شاخصه‌های لمس مسائل مهندسی در زیر آمده است. اولاً- مجازید هر متغیر را که در معادلات حاکم می‌بینید متغیر با زمان فرض کنید ولی این نکته بعداً موقع حل یا بیان لاپلاسی در درس‌ساز می‌شود. در نتیجه باید برخی از متغیرها را پارامتر فرض کرد و آنها را ثابت یا متوسط‌گیری شده دانست. راه دیگر این است که فرضیات مهندسی (راه حل فیزیکی) به کار بگیرید یا با استفاده از بسط تیلور آنها را خطی کنید (راه حل ریاضی).

ثانیاً- برای بدست آوردن معادلات حاکم، فراموش نکنید که از قوانین عام (بقای انرژی و بقای جرم) و قوانین خاص (تجربی) به نحو مقتضی و متناسب با حال و هوای مسئله استفاده کنید.

ثالثاً- سعی کنید صورت مسئله را در قالب یک سؤال طرح کنید. به طور مثال برای سیستم سطح مایع بپرسید: اگر شیر جریان ورودی را باز یا بسته‌تر کنیم، آنگاه ارتفاع مایع چگونه با زمان تغییر می‌کند؟

رابعاً) موقع نوشتن معادلات حاکم و معرفی روابط ریاضی مسئله، همیشه سعی کنید نهایتاً بر حسب کمیات مهندسی، قابل اندازه‌گیری و ماکرو بنویسید. در مهندسی شیمی این کمیات عبارتند از دبی، دما، فشار، ارتفاع، دانسیته، غلظت و... وگرنه کاری ندارد که آن را بر حسب انترپی و کشش سطحی نوشت!

به شکل شماتیک مسأله مراجعه کنید:



شکل ۱. دیاگرام شماتیک فرآیند سطح مایع.

برای نوشتن معادلات حاکم، قوانین بقای انرژی و جرم را می‌نویسیم. چون سیستم را ایزوترم در نظر گرفتیم، لذا بیلان انرژی بدرد ما نمی‌خورد و باید فقط بیلان جرم را بنویسیم.

انباشت جرم = خروجی جرم - ورودی جرم

نکته ۱: چون در سیستم حاضر، واکنش شیمیایی رخ نمی‌دهد، از نوشتن جمله تولید یا کاهش در حجم پرهیز می‌کنیم.

نکته ۲: چون سیستم چندجزئی نمی‌باشد، بیلان جرم بالا، کلی است نه جزئی.

در ادامه سعی می‌کنیم موازنه جرم کیفی بالا را بر حسب متغیرهای متعارف بنویسیم:

$$\text{ورودی} \quad : \rho q_{in} \Delta t$$

$$\text{خروجی} \quad : \rho q_{out} \Delta t$$

$$\text{انباشت} \quad : \rho v|_{t+\Delta t} - \rho v|_t$$

با جایگذاری و فرض سطح مقطع ثابت و سپس حدگیری:

$$q_{in} - q_{out} = \frac{dv}{dt} = A \frac{dh}{dt}$$

حال اگر تغییرات h (خروجی و تاثیرپذیر) را بر حسب تغییرات q_{in} (ورودی و تاثیرگذار) بخواهیم بنویسیم، باید جمله q_{out} یا ثابت باشد (مثلا یک پمپ نصب کرده‌ایم) یا به نحوی با کمیت دیفرانسیلی h مربوط باشد. از مکانیک سیالات می‌دانیم که می‌توان مقاومت هیدرولیکی شیر را به هد بالا سر آن ربط داد. این می‌شود یک قانون خاص استاتیکی (جبری) و به شکل زیر می‌نویسیم:

$$q_{out} = c_v \sqrt{h}$$

نکته ۳: اگر شیر نداشتیم و از طریق لوله‌ای با قطر نسبتاً کوچک (نسبت به قطر مخزن) تخلیه سیال انجام می‌شد، ضریب تخلیه c_v بالا معادل $\sqrt{\rho g}$ می‌باشد.

با جایگذاری q_{out} در معادله، به معادله حاکم دینامیک سیستم سطح مایع می‌رسیم:

$$A \frac{dh}{dt} + c_v \sqrt{h} = q_{in}$$

خطی سازی - قابل ذکر است که این معادله دیفرانسیال بسیار شبیه دینامیک دماسنج جبهه‌ای می‌باشد. با این تفاوت که جمله غیرخطی \sqrt{h} داریم. برای تبدیل لاپلاس گرفتن و معادله دیفرانسیل را با بیان تابع انتقال نمایش دادن، باید خطی سازی کنیم. از نظر ریاضی، تنها ابزار ما بسط تیلور می‌باشد:

$$f(x) = f(x_0) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x=x_0} (x - x_0)^2 + \dots$$

و برای دو متغیره:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0, y_0} (x - x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x_0, y_0} (y - y_0) +$$

$$\frac{1}{2} \left\{ \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{x_0, y_0} (x - x_0)^2 + 2 \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{x_0, y_0} (x - x_0)(y - y_0) + \left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|_{x_0, y_0} (y - y_0)^2 + \dots \right.$$

همانطور که معلوم است، برای حالت یک متغیره، فقط دو جمله اول نسبت به x خطی بوده و در حالت دو متغیره، فقط سه جمله اول نسبت به x و y خطی می‌باشد.

حال اگر تابع غیر خطی \sqrt{h} یا $h^{\frac{1}{2}}$ را بسط تیلور دهیم و فقط دو جمله اول را در نظر بگیریم:

$$\sqrt{h} = \sqrt{h_{ss}} + \frac{d(\sqrt{h})}{dh} \Big|_{h=h_{ss}} (h - h_{ss})$$

با جایگذاری در معادله دیفرانسیل و مقایسه با حالت یکنواخت (جهت تعریف متغیر انحرافی):

$$\begin{cases} A \frac{dh}{dt} + c_v \sqrt{h_{ss}} + \frac{c_v (h - h_{ss})}{2\sqrt{h_{ss}}} = q_{in} \\ 0 + c_v \sqrt{h_{ss}} + 0 = q_{in,ss} \end{cases}$$

و تعریف متغیرهای انحرافی:

$$\bar{h} = h - h_{ss} \quad , \quad \bar{q}_{in} = q_{in} - q_{in,ss}$$

به رابطه نهایی زیر می‌رسیم (در حوزه زمان):

$$A \frac{d\bar{h}}{dt} + c' \bar{h} = \bar{q}_{in} \quad , \quad c' \triangleq \frac{c_v}{2\sqrt{h_{ss}}}$$

جهت سهولت، تعاریف زیر را می‌پذیریم:

$$\tau_p \triangleq A / c' \quad , \quad k_p = 1 / c'$$

آنگاه با تبدیل لاپلاس و مرتب‌سازی، به تابع انتقال زیر می‌رسیم (حوزه لاپلاس):

$$\frac{\bar{h}(s)}{\bar{q}_{in}} = \frac{k_p}{\tau_p s + 1}$$

نکته ۴: علت ظهور k_p اختلاف دیمانسیون h (ارتفاع با دیمانسیون L) و q (دبی با دیمانسیون $L^3 T^{-1}$) می‌باشد. در مسئله دینامیک داماسنج جیوه‌ای، به خاطر اینکه ورودی و خروجی هر دو دما بودند، بهره فرآیند معادل واحد می‌شد.

نکته ۵: بهره یکنواخت فرآیند k_p و همچنین ثابت زمانی (τ_p) به h_{ss} بستگی دارند، نافهم.

فرآیند اختلاط

سیستم مخزنی شکل ۲ را در نظر بگیرید که در آن فقط اختلاط و انحلال فیزیکی صورت می‌پذیرد.

برای مدل‌سازی ریاضی، از قانون عام بیلان جرم (جزئی) استفاده می‌کنیم.

$$\text{ورودی} : c_{in} q_{in} \Delta t$$

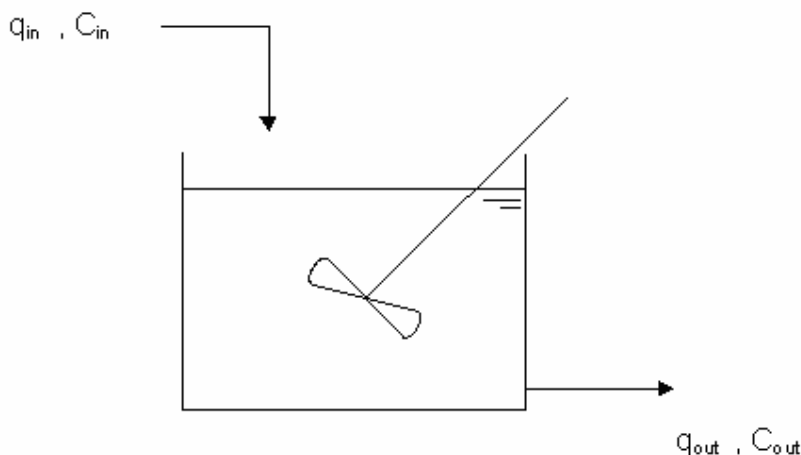
$$\text{خروجی} : c_{out} q_{out} \Delta t$$

$$\text{انباشت} : Vc_{out} \Big|_{t+\Delta t} - Vc_{out} \Big|_t$$

ورودی - خروجی = انباشت

جایگذاری و حدگیری:

$$c_{in} q_{in} - c_{out} q_{out} = \frac{dVc_{out}}{dt}$$



شکل ۲. دیاگرام شماتیک فرآیند اختلاط.

حال، به انتخاب خودمان، ورودی و خروجی را از متغیرهای سیستم انتخاب می‌کنیم:

مثلاً اگر بخواهیم بدانیم C_{in} اگر تغییر کند (مثلاً تغییر پله)، آنگاه C_{out} چگونه تغییر می‌کند، باید به دنبال تابع انتقال $\frac{C_{out}}{C_{in}}$ باشیم. چرا که سیگنال تاثیرگذار یا ورودی را C_{in} گرفتیم و C_{out} را تاثیرپذیر یا خروجی. اگر بخواهیم تغییرات q_{in} و تاثیر آن را روی C_{out} را هم در نظر بگیریم، باید دنبال ماتریس تابع انتقال زیر بگردیم:

$$\overline{C_{out}} = G_{11} \overline{C_{in}} + G_{12} \overline{q_{in}}$$

به طوریکه:

$$G_{11} \triangleq \frac{\overline{C_{out}}}{\overline{C_{in}}}, \quad G_{12} \triangleq \frac{\overline{C_{out}}}{\overline{q_{in}}}$$

سیستم بالا یک سیستم 1×2 (دو ورودی - یک خروجی) می‌باشد و برای محاسبه G_{11} و G_{12} باید قطعاً خطی‌سازی هم انجام دهیم، چون جمله $C_{out} q_{out}$ یک جمله غیرخطی است!

حال اگر فرض کنیم انحلال نمک یک تحول سرمازا و یا گرماگیر است، آنگاه باید موازنه انرژی را نیز نوشته و بدنبال ماتریس تابع انتقال چند ورودی - چندخروجی ($MIMO$) بگردیم. (برای تعداد ورودی‌ها: ۲ و تعداد خروجی‌ها: ۳)

$$\begin{bmatrix} \overline{C_{out}} \\ \overline{q_{out}} \\ \overline{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \\ G_{31} & G_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{C_{in}} \\ \overline{q_{in}} \end{bmatrix}$$

(و برای تعداد ورودی‌ها: ۳ و تعداد خروجی‌ها: ۳)

$$\begin{bmatrix} \overline{C_{out}} \\ \overline{q_{out}} \\ \overline{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{C_{in}} \\ \overline{q_{in}} \\ \overline{T_{in}} \end{bmatrix}$$

دقت شود چون سیستم پمپ ندارد (یعنی $\overline{q_{out}}$ ثابت نیست)، لذا رابطه خروجی h با سیستم از طریق $\overline{q_{out}}$ معلوم می‌شود. اصولاً هرگاه خروجی‌ها با همدیگر رابطه جبری داشته باشند در تابع انتقال آنرا منعکس نمی‌کنیم، بلکه کفایت فقط یکی از آنها را بنویسیم، مثل مثال اخیر که فقط $\overline{q_{out}}$ را نوشتیم.

به‌هرحال، پیچیدگی مدل یا فرمولاسیون دست خود ماست. محض سهولت، فرض می‌کنیم فقط یک ورودی داریم و آن هم c_{in} باشد و به دنبال تغییرات c_{out} بر اثر تغییر در آن هستیم:

$$q_{in} = q_{out} = q \rightarrow \begin{cases} c_{in}q - c_{out}q = V \frac{dc_{out}}{dt} \\ c_{in,ss}q - c_{out,ss}q = 0 \end{cases}$$

با تفاضل دو رابطه بالا و تعریف $\tau_p \triangleq V/q$ و تبدیل لاپلاس و باز ترکیب عبارت:

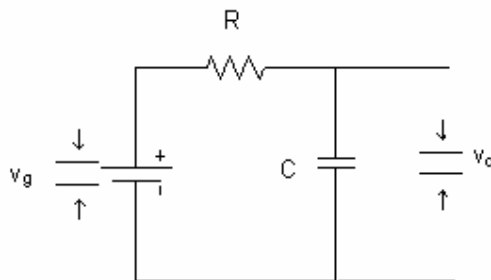
$$\frac{\overline{c_{out}}}{\overline{c_{in}}} = \frac{1}{\tau_p s + 1}$$

نکته ۶: مجدداً بهره یکنواخت فرآیند، واحد شد، علت هم معلوم است!

نکته ۷: به تعریف τ با بار اطلاعاتی - مهندسی آن توجه کنید. V نمایش ظرفیت و انباشت بوده و q بیانگر و نماینده سرعت و انتقال. اگر q در برابر V بسیار بزرگ باشد، آنگاه رفتار سیستم به مثابه یک رفتار جبری می‌باشد، فتأمل!

شبکه یا مدار RC

مطلوب است پاسخ v_c نسبت به تغییرات v_g



شکل ۳. دیاگرام شماتیک یک شبکه مقاومت - خازن.

بیان انرژی (قانون کرشهف) به لسان مدار الکتریکی می‌شود مجموع افزایش ولتاژ معادل است با مجموع افت ولتاژ:

$$v_g = Ri + \frac{1}{c} \int idt$$

حال باید v_c را دخیل کنیم، طبق تعریف: (q بار الکتریکی و c ثابت خازن است).

$$v_c = \frac{q}{c}$$

از طرفی $i = \frac{dq}{dt}$ پس با جایگذاری:

$$v_g = R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{c} q(t)$$

$$= Rc \frac{dv_c}{dt} + v_c$$

با تعریف متغیرهای، انحرافی:

$$\bar{v}_c = v_c - v_{c,ss}$$

$$\bar{v}_q = v_q - v_{q,ss}$$

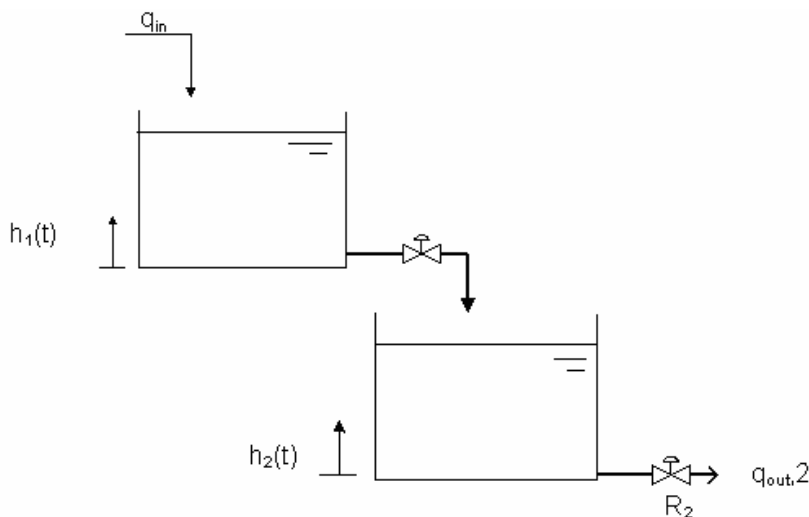
با جایگذاری:

$$\frac{\bar{v}_c(s)}{\bar{v}_q(s)} = \frac{1}{\tau_p s + 1}, \quad \tau_p \triangleq Rc$$

نکته ۸: دینامیک، دینامیک است. می‌خواهد سیستم اختلاط باشد، سیستم RC باشد یا نحوه رفتار دینامیکی رشد یک درخت! به شیوه مدل‌سازی نگاه کن، نه مصادیق آن، روش ماهیگیری یاد بگیر، نه خود ماهی!

سیستم‌های درجه اول متوالی، سیستم غیرتداخلی

سیستم سطح مایع شکل زیر را در نظر بگیرید. در اینجا مثل سیستم‌های قبلی سعی می‌کنیم با معادلات خاص و عام به عنوان ابزار ریاضی مسئله متغیرهای جبری و دیفرانسیلی را به هم مربوط کرده و سپس با صورت مسئله و تابع انتقال بدست آمده بازی کنیم.



شکل ۴. دو تانک متوالی به صورت غیرتداخلی.

اگر موازنه جرم کلی را برای هر تانک بنویسیم:

$$\text{First Tank} \quad : \quad A_1 \frac{dh_1}{dt} + c_1 \sqrt{h_1} = q_{in}$$

$$\text{Second Tank:} \quad A_2 \frac{dh_2}{dt} + c_2 \sqrt{h_2} = q_{out,1} = c_1 \sqrt{h_1}$$

اگر q_{in} را ورودی بگیریم، چون دو معادله داریم، علی‌القاعده، دو مجهول (h_1, h_2) را باید بتوانیم بدست آوریم. حال سؤال اینجاست، ارتفاع تانک دوم بر اثر تغییر در ورودی تانک اول چگونه تغییر می‌کند. یعنی یکی از دو جواب h_1 و h_2 را می‌خواهیم. دقت شود، قبلاً این مسئله برای تانک اول (یعنی h_1) حل کرده‌ایم. برای محاسبه تابع انتقال، باید خطی‌سازی کنیم:

$$\begin{cases} A_1 \frac{d\bar{h}_1}{dt} + c_1' \bar{h}_1 = R_1 \bar{q}_{in} \\ A_2 \frac{d\bar{h}_2}{dt} + c_2' \bar{h}_2 = c_1' \bar{h}_1 \end{cases}$$

با تعاریف زیر:

$$R_1 \triangleq 1/c_1' \quad , \quad \tau_{p,1} \triangleq A_1 R_1$$

$$R_2 \triangleq 1/c_2' \quad , \quad \tau_{p,2} \triangleq A_2 R_2$$

با جایگذاری تعاریف بالا:

$$\begin{cases} \tau_1 \frac{d\bar{h}_1}{dt} + \bar{h}_1 = R_1 \bar{q}_{in} \\ \tau_2 \frac{d\bar{h}_2}{dt} + \bar{h}_2 = \frac{R_2}{R_1} \bar{h}_1 \end{cases}$$

برای حذف \bar{h}_1 از معادله پایین، باید تبدیل لاپلاس بگیریم تا سیستم جبری شود!

$$L\{\dots\} \rightarrow \begin{cases} \tau_1 s \bar{H}_1(s) + \bar{H}_1(s) = R_1 \bar{Q}_{in}(s) \\ \tau_2 s \bar{H}_2(s) + \bar{H}_2(s) = \frac{R_2}{R_1} \bar{H}_1(s) \end{cases}$$

از معادله اول داریم:

$$\frac{\bar{H}_1(s)}{\bar{Q}_{in}(s)} = \frac{R_1}{\tau_1 s + 1} \Rightarrow \bar{H}_1(s) = \frac{R_1}{\tau_1 s + 1} \bar{Q}_{in}(s)$$

حال $\bar{H}_1(s)$ بالا را در معادله دوم جایگزین می‌کنیم و رابطه $\bar{H}_2(s)$ با ورودی سیستم، یعنی $\bar{Q}_{in}(s)$ را بدست آوریم:

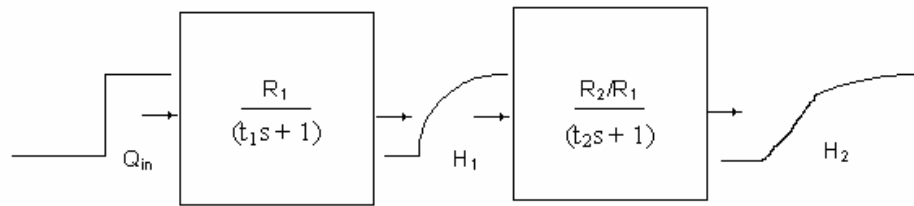
$$\frac{\bar{H}_2(s)}{\bar{Q}_{in}(s)} = \frac{1}{\tau_1 s + 1} \cdot \frac{R_2}{\tau_2 s + 1}$$

نکته ۸: می‌توانیم از معادله دوم، ابتدا رابطه بین $\bar{H}_1(s)$ و $\bar{H}_2(s)$ را بدست آوریم، یعنی $\frac{\bar{H}_2(s)}{\bar{H}_1(s)} = \frac{R_2 / R_1}{\tau_2 s + 1}$ ، سپس

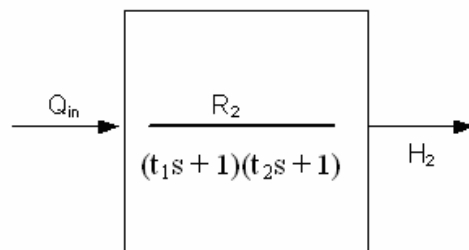
$$\left(\frac{\bar{H}_1}{\bar{Q}_{in}}\right) \times \left(\frac{\bar{H}_2}{\bar{H}_1}\right) = \left(\frac{\bar{H}_2}{\bar{Q}_{in}}\right) \Rightarrow \frac{R_1}{\tau_1 s + 1} \times \frac{R_2 / R_1}{\tau_2 s + 1} = \frac{R_2}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

آن را در رابطه $\frac{\bar{H}_1(s)}{\bar{Q}_{in}(s)}$ ضرب کنیم:

یعنی انگار برای بدست آوردن تابع انتقال یا نسبت خروجی سیستم کل به ورودی سیستم کل، از ضرب دو بلوک میانی بدست آمده است، فافهم، به شکل ۵، ۶ و ۷ توجه کنید. دقت کنید هر تابع انتقال وظیفه‌اش پخ کردن (damp) ورودی است!

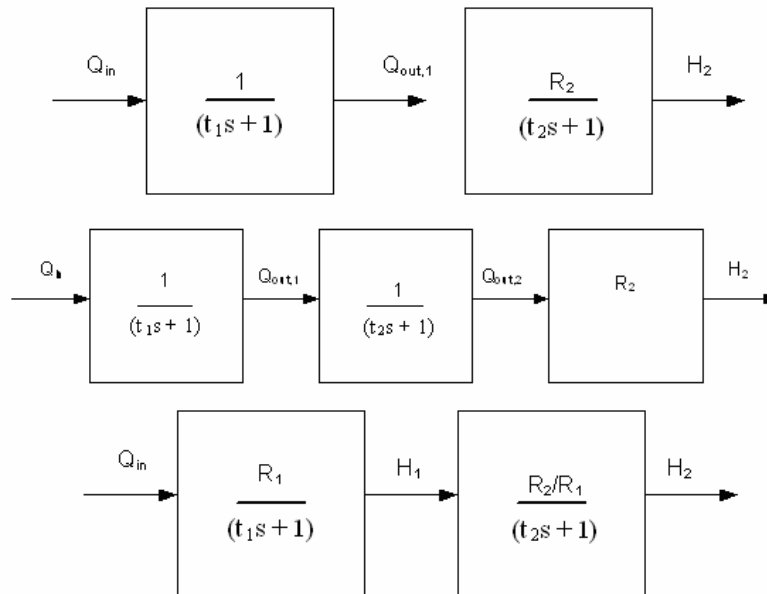


شکل ۵- تابع انتقال کلی دو سیستم درجه اول متوالی.



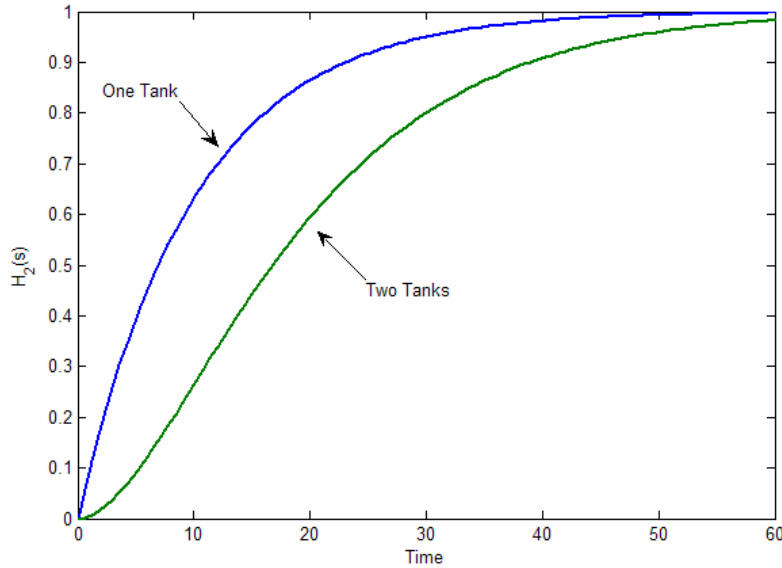
شکل ۶- تابع انتقال کلی یک سیستم دو تانکی غیرمتداخل.

نکته ۹: شکل‌های زیر همگی معادلند به ضرب بلوک‌ها و ثوابت بصری دقت کنید:



شکل ۷- بلوک‌های دینامیکی معادل سیستم دو تانکی غیرمتداخل.

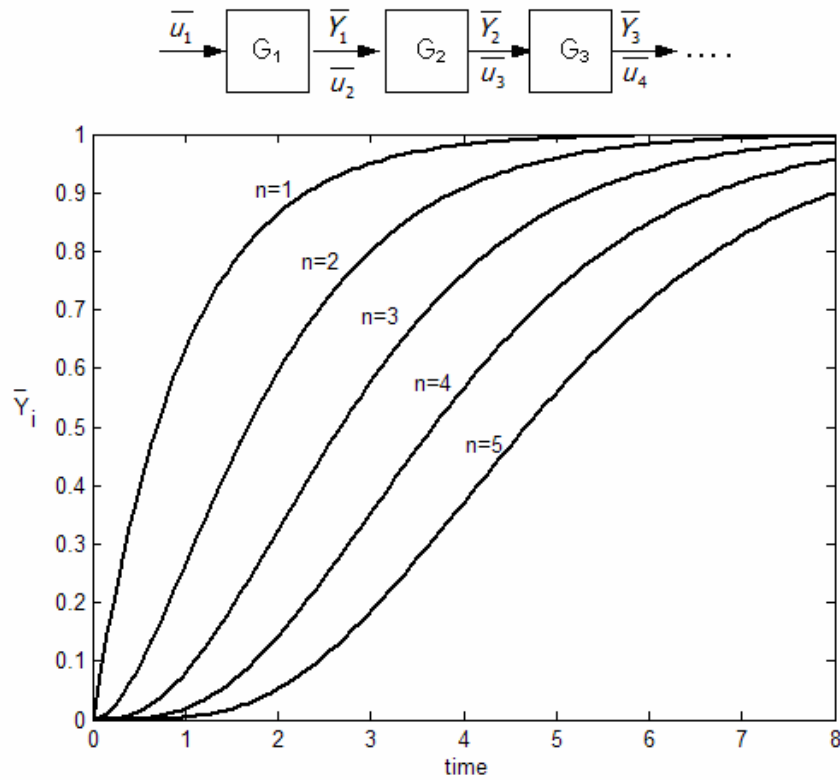
نکته ۱۰: در تابع انتقال کلی سیستم خبری از R_1 نیست ولی از مشخصات دینامیکی تانک اول، فقط τ_1 را می‌بینیم.
 نکته ۱۱: مادامی که h_2 روی دینامیک h_1 اثر (برگشتی) نمی‌گذارد، به راحتی می‌توانیم دو تابع انتقال را در هم ضرب کنیم. به همین علت به آن می‌گوییم سیستم غیرتداخلی یا غیربرگشتی.



شکل ۸- مقایسه رفتار دینامیکی سیستم تک تانکی و دو تانکی.

نکته ۱۲: قبلاً گفته شد که به تابع انتقال درجه اول می‌گویند تاخیر درجه اول. حال با توجه به شکل ۷، تانک دوم چگونه باعث ضربه گرفتن و کاهش تغییرات ارتفاع می‌شود؟ نحوه تغییرات در 0^+ خود گویای همه چیز است. در حالت یک تانک، پاسخ خروجی با شیب غیر صفر (در صورت مقیاس کردن، با شیب 45°) شروع می‌شود. حال آنکه برای دو تانک به بالا، با شیب صفر شروع می‌کند.

نکته ۱۳: اگر قضیه را تعمیم دهیم، می‌توان گفت اگر n تانک غیرتداخلی پشت سر هم داشته باشیم، وظیفه هر تانک بعدی، *Damp* کردن پاسخ تانک قبلی است. به شکل ۹ مراجعه کنید. این پدیده موسوم به کانولوشن (*convolution*) می‌باشد و دارای کاربردهای فراوانی در مدل‌سازی فرآیندهای مرحله‌ای (*Stage Wise*) و جریان‌های غیرایده‌آل (در طراحی راکتورهای شیمیایی) دارد.



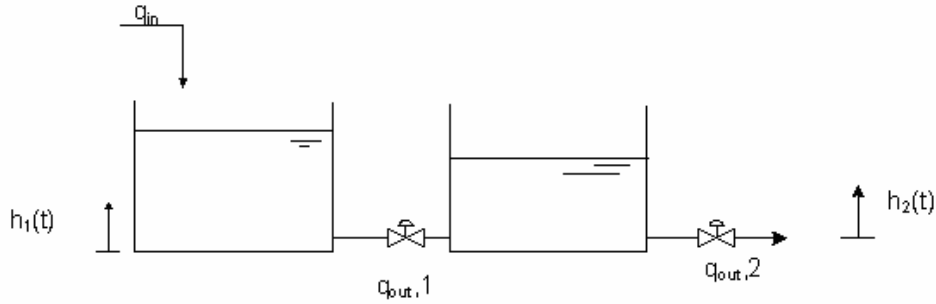
شکل ۹- توالی بلوکهای دینامیکی.

سیستم‌های درجه اول متوالی سیستم تداخلی (بارگذاری)

سیستم سطح مایع شکل ۱۰ را در نظر بگیرید. همانطور که معلوم است، (هد) تانک دوم می‌تواند روی نرخ خروجی تانک اول اثر یا بار بگذارد. اگر معادلات حاکم را بنویسیم:

$$\text{First Tank} \quad : \quad A_1 \frac{dh_1}{dt} + q_{out,1} = q_{in}$$

$$\text{Second Tank:} \quad A_2 \frac{dh_2}{dt} + c_2 \sqrt{h_2} = q_{out,1}$$



شکل ۱۰- یک سیستم تداخلي دو تانكي.

تنها تفاوتی که این دستگاه معادلات دیفرانسیل با حالت غیر تداخلي دارد، در $q_{out,1}$ می باشد:

$$q_{out,1} = c_1 \sqrt{h_1} \quad (\text{حالت غیر تداخلي):}$$

$$q_{out,1} = c_1 \sqrt{h_1 - h_2} \quad (\text{حالت تداخلي):}$$

برای خطی سازی، از حالت قبل (مثال غیر تداخلي) برای تابع غیر خطی $c_2 \sqrt{h_2}$ بسط تیلور تک متغیره انجام دهیم:

$$\sqrt{h_2} \approx \sqrt{h_{2,ss}} + \frac{1}{2\sqrt{h_{2,ss}}} \bar{h}_2$$

ولی برای حالت تداخلي، باید بسط تیلور دو متغیره انجام دهیم:

$$\sqrt{h_1 - h_2} \approx \sqrt{h_{1,ss} - h_{2,ss}} + \frac{\partial(\sqrt{h_1 - h_2})}{\partial h_1} \Big|_{h_{1,ss}, h_{2,ss}} (h_1 - h_{1,ss}) + \frac{\partial(\sqrt{h_1 - h_2})}{\partial h_2} \Big|_{h_{1,ss}, h_{2,ss}} (h_2 - h_{2,ss})$$

با جایگذاری عبارات بالا و تعریف متغیرهای انحرافی: (سعی کنید این عبارات را خودتان بدست آورید)

$$\begin{cases} A_1 \frac{d\bar{h}_1}{dt} + \frac{c_1}{2\sqrt{\Delta h_{ss}}} \bar{h}_1 - \frac{c_1}{2\sqrt{\Delta h_{ss}}} \bar{h}_2 = \bar{q}_{in} \\ A_2 \frac{d\bar{h}_2}{dt} + \frac{c_2}{2\sqrt{\Delta h_{ss}}} \bar{h}_2 = \frac{c_1}{2\sqrt{\Delta h_{ss}}} (\bar{h}_1 - \bar{h}_2) \end{cases}$$

$$\Delta h_{ss} \triangleq h_{1,ss} - h_{2,ss}$$

برای هماهنگی با کتب مرجع، تعاریف زیر را می پذیریم:

$$\frac{1}{R_1} \triangleq \frac{C_1}{2\sqrt{\Delta h_{1,ss}}}, \quad \frac{1}{R_2} \triangleq \frac{C_2}{2\sqrt{\Delta h_{2,ss}}}$$

بدین ترتیب، بیان دینامیکی مسئله در حوزه زمان و خطی شده به شکل زیر در می آید:

$$\begin{cases} A_1 \frac{d\bar{h}_1}{dt} + \frac{\bar{h}_1 - \bar{h}_2}{R_1} = \bar{q}_{in} \\ A_2 \frac{d\bar{h}_2}{dt} + \frac{1}{R_2} \bar{h}_2 = \frac{\bar{h}_1 - \bar{h}_2}{R_1} \end{cases}$$

در اینجا مثل حالات قبل، تبدیل لاپلاس گرفته و با فرض اینکه \bar{q}_{in} ورودی یا تابع تحریک (اثرگذار) باشد که آنگاه اگر \bar{h}_2 را خروجی یا تاثیرپذیر بدانیم با عملیات جبری، می‌توان تابع انتقال مربوطه را بدست آورد.

$$\frac{\bar{H}_2(s)}{\bar{Q}_{in}(s)} = \frac{R_2}{\tau_1\tau_2s^2 + (\tau_1 + \tau_2 + \frac{R_2}{R_1}\tau_1)s + 1}$$

نکته ۱۴: تابع انتقال غیرتداخلی را با حالت تداخلی مقایسه کنید:

$$\frac{\bar{H}_2(s)}{\bar{Q}_{in}(s)} = \frac{R_2}{\tau_1\tau_2s^2 + (\tau_1 + \tau_2)s + 1}$$

مشاهده می‌کنیم که جمله $(R_2/R_1)\tau_1$ (یا A_1R_2) به ضریب s اضافه شده است. به این می‌گویند بارگذاری (در اصطلاح برقی‌ها) یا تداخل (در قاموس مهندسی شیمی). به بیان دیگر، اگر فرض کنید مشخصات تانک‌ها و شیرها یکی

$$A_1 = A_2 = A, \quad R_1 = R_2 = R, \quad \tau_1 = \tau_2 = \tau$$

باشند، یعنی:

آنگاه راحت‌تر می‌توان مقایسه مزبور را انجام داد:

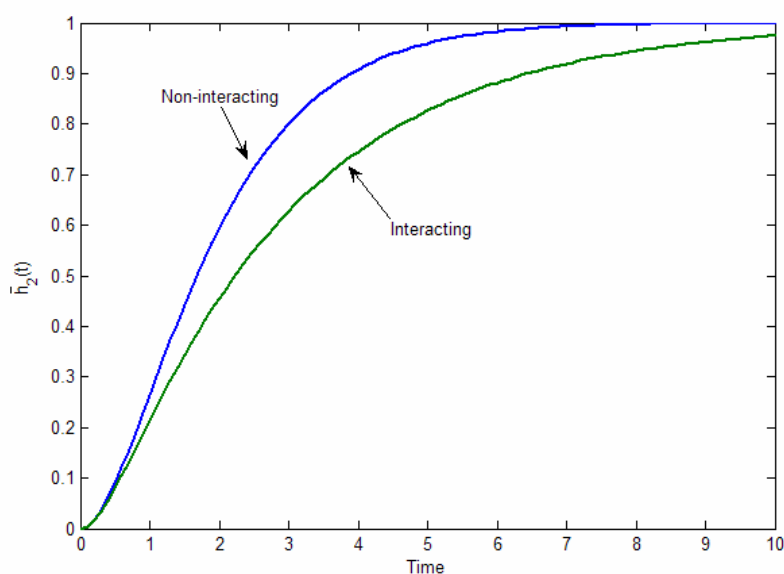
$$\text{غیرتداخلی: } \frac{\bar{H}_2(s)}{\bar{Q}_{in}(s)} = \frac{R}{\tau^2s^2 + 2\tau s + 1} = \frac{R}{(\tau s + 1)(\tau s + 1)}$$

$$\text{تداخلی: } \frac{\bar{H}_2(s)}{\bar{Q}_{in}(s)} = \frac{R}{\tau^2s^2 + 3\tau s + 1} = \frac{R}{(0.382\tau s + 1)(2.618\tau s + 1)}$$

و این حامل این معنیست: اثر تداخل به شکل تغییر ثوابت زمانی موثر سیستم‌ها بوده است.

نکته ۱۵: تداخل روی بهره یکنواخت تاثیری ندارد، یعنی: $G_{interacting}(s=0) = G_{non-interacting}(s=0)$

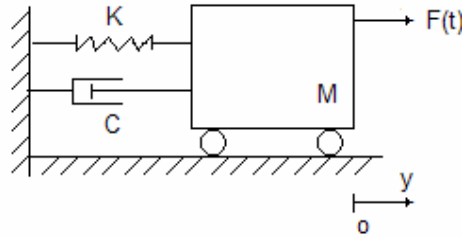
نکته ۱۶: تداخل پاسخ را کند می‌کند، به شکل ۱۱ توجه کنید.



شکل ۱۱- مقایسه پاسخ پله دو سیستم همسان تداخلی و غیرتداخلی.

مقدمه

در این جلسه به معرفی یک نمونه فیزیکی پایه دیگر، یعنی سیستم درجه دوم می‌پردازیم. در مهندسی شیمی، معمولاً در راکتورها یا حلقه‌های مدار بسته به توابع انتقال درجه دوم برمی‌خوریم، ولی به‌رحال مثال کلاسیک آن در مکانیک (جامدات) است، یعنی سیستم فنر-ضربه‌گیر. به شکل ۱ مراجعه کنید.



شکل ۱. دیاگرام شماتیک یک سیستم مکانیکی با دینامیک درجه دوم.

برای مدل‌سازی، سه رویکرد می‌توان در نظر گرفت. یک ایده، نوشتن بقای اندازه حرکت (بیان مومنتوم) می‌باشد، ایده دیگر، معادل بیان مومنتوم یا همان فرآیند نیروها می‌باشد و ایده سوم، تعبیر انرژی از بقای اندازه حرکت یا همان بیان انرژی می‌باشد. رویکرد دوم، یک تعبیر دینامیکی از حرکت و شتاب ذره‌ای به جرم M می‌باشد و به احترام مهندسی مکانیک، از آن استفاده می‌کنیم:

$$\sum F_i = M \frac{dv}{dt} (= Ma)$$

برای مثال فنر-دمپر، معادله بالا به شکل زیر درمی‌آید:

$$\underbrace{F(t)}_{\text{External Force}} - \underbrace{Ky(t)}_{\text{Spring Force}} - \underbrace{Cv(t)}_{\text{Damper Force}} = Ma(t)$$

با توجه به تعریف سرعت و شتاب، معادله بالا را می‌توان برحسب مسافت، یعنی y نوشت:

$$v \triangleq \frac{dy}{dt}, \quad a \triangleq \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \Rightarrow$$

$$\frac{M}{K} \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{C}{K} \frac{dy}{dt} + y = \frac{F(t)}{K}$$

با توجه به اینکه متغیر مسافت (y) دارای مقدار اولیه صفر می‌باشد، لذا با این توفیق اجباری روبرو هستیم که خود y ، یک متغیر انحرافیست. محض سهولت نیز پارامترهای زیر را تعریف می‌کنیم (همگی نسبت به ثابت فنر):

$$\tau^2 \triangleq \frac{M}{K}, \quad 2\xi\tau \triangleq \frac{C}{K}, \quad u(t) \triangleq \frac{F(t)}{K}$$

با جایگذاری:

$$\tau^2 \frac{d^2y}{dt^2} + 2\xi\tau \frac{dy}{dt} + y = u(t)$$

اگر از طرفین لاپلاس بگیریم و معادله را برای محاسبه تابع انتقال سیستم، بازآرایی کنیم:

$$\frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)} = \frac{1}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1}$$

نکته ۱: سه نوع نمایش برای توابع انتقال مرسومست که هر کدام را یک اقتضایی است، چه برای کنترل، چه برای مانتورینگ، چه برای تحلیل و چه برای شبیه‌سازی.

$$\text{نمایش صفر و قطب :} \quad G(s) = \frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}, \quad m \leq n$$

$$\text{نمایش چندجمله‌ای :} \quad G(s) = \frac{s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_0}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_0}, \quad m \leq n$$

$$\text{نمایش ثوابت زمانی :} \quad G(s) = K \frac{(\xi_1 s + 1)(\xi_2 s + 1)\cdots(\xi_m s + 1)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)\cdots(\tau_n s + 1)}, \quad m \leq n$$

به هر حال، به هر شکلی که نشان دهیم، منظورمان از سیستم درجه دوم، وجود مرتبه دوم مشتق خروجی می‌باشد، از اینرو، همیشه به مخرج تابع انتقال نگاه کنید، اگر آثاری از توان دوم s مشاهده کردید، سیستم یک سیستم درجه دوم است و اگر s^3 بچشم می‌خورد، سیستم درجه سوم داریم و قس علیهذا. در ادامه، طبق روال همیشگی، پاسخ سیستم را به توابع محرک اساسی مورد ارزیابی و تحلیل قرار می‌دهیم.

پاسخ پله سیستم درجه دوم - اگر ورودی را پله واحد در نظر بگیریم، آنگاه تبدیل لاپلاس خروجی به شکل زیر درمی‌آید:

$$\bar{u}(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow \bar{y}(s) = \frac{1}{s} \times \frac{1}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1}$$

پس از تجزیه کسرها:

$$\bar{y}(s) = \frac{1}{s} \times \frac{1}{s-p_1} \times \frac{1}{s-p_2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-p_1} + \frac{C}{s-p_2}$$

$$p_1, p_2 \triangleq -\frac{\xi}{\tau} \pm \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\tau}$$

با توجه به شکل p_1 و p_2 سه حالت بر حسب مقادیر ξ می‌توان متصور شد:

۱- اگر $\xi > 1$ باشد، آنگاه دو ریشه p_1 و p_2 حقیقی و متمایز می‌باشند. آن موقع رفتار سیستم مثل رفتار دو سیستم

درجه اول متوالی (چه تداخلی و چه غیرتداخلی) می‌باشد. شکل پاسخ معروف به سیگموئید یا S شکل می‌باشد. این پاسخ موسوم به overdamped است، یعنی اثر ضربه گیر در برابر ذخیره‌سازی انرژی توسط فنر غالب است.

۲- اگر $\xi = 1$ باشد (معمولاً خیلی بعید است) آنگاه با دو ریشه مساوی حقیقی روبرو هستیم. آن موقع رفتار سیستم، شبیه دو سیستم درجه اول متوالی متساوی الدینامیک (!) می‌باشد، یعنی انگار ثابت زمانی هر دو با هم مساویند. این سیستم موسوم به critically damped است. یعنی فنر و ضربه گیر هر دو اثری معادل دارند.

۳- اگر $\xi < 1$ باشد، زیر رادیکال منفی شده و با دو ریشه مختلط مزدوج مواجه هستیم. در این حالت، رفتار سیستم نوسانی میرا شونده است. این سیستم موسوم به underdamped است، یعنی فنر نیز محلی از اعراب دارد.

همانطور که معلوم است، دو حالت اول خیلی بار اطلاعاتی ندارند و قبلاً با آنها آشنا شده‌ایم. ولی حالت سوم یعنی $\xi < 1$ (یا برای سیستم فنر - ضربه گیر: $C < 2K\tau$) یک پاسخ جدید است و همچنین متداول و رایج. بدین ترتیب می‌توان اکثر پاسخ‌های نوسانی میرا شونده را با درجه دوم تقریب زد. دقت شود، الزامی ندارد که حتماً با سیستم فنر - ضربه گیر روبرو باشیم، بلکه ماهیت پاسخ (نوسانی میرا شونده) برای ما مهم است. شایان ذکر است که پاسخ‌های نوسانی میرا شونده را

نمی‌توان با دو سیستم درجه اول متوالی تقریب زد، چرا که هیچ سیستم فیزیکی درجه اول نداریم که دارای ثابت زمانی مختلط باشد!

می‌توان با تبدیل معکوس گرفتن هر سه حالت به پاسخ‌های تحلیلی زیر رسید:

$$\bar{y}(t) = 1 - e^{-\xi t/\tau} \left[\cosh\left(\sqrt{\xi^2 - 1} \frac{t}{\tau}\right) + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \sinh\left(\sqrt{\xi^2 - 1} \frac{t}{\tau}\right) \right] \quad \text{برای } \xi > 1$$

$$\bar{y}(t) = 1 - \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) e^{-t/\tau} \quad \text{برای } \xi = 1$$

$$\bar{y}(t) = 1 - \frac{e^{-\xi t/\tau}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin\left[\sqrt{1 - \xi^2} \frac{t}{\tau} + tg^{-1}\left(\frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}\right)\right] \quad \text{برای } \xi < 1$$

نکته ۲: برای حالت $\xi < 1$ نیاز نیست که پاسخ زمانی را حفظ کنید ولی قیافه لاپلاسی را حفظ کنید:

$$\frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)} = \frac{\text{gain}}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1}$$

دقت شود، ضریب آخر باید معادل واحد باشد، در صورتی که معادله مشخصه (چندجمله‌ای مخرج) جواب نداشت (زیر رادیکال منفی) یعنی پاسخ، نوسانی میرا شونده است.

نکته ۳: آرگومان $tg^{-1}\left(\frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}\right)$ نه پسی فاز است و نه پیشی فاز. چون پاسخ پله است و نه پاسخ فرکانسی.

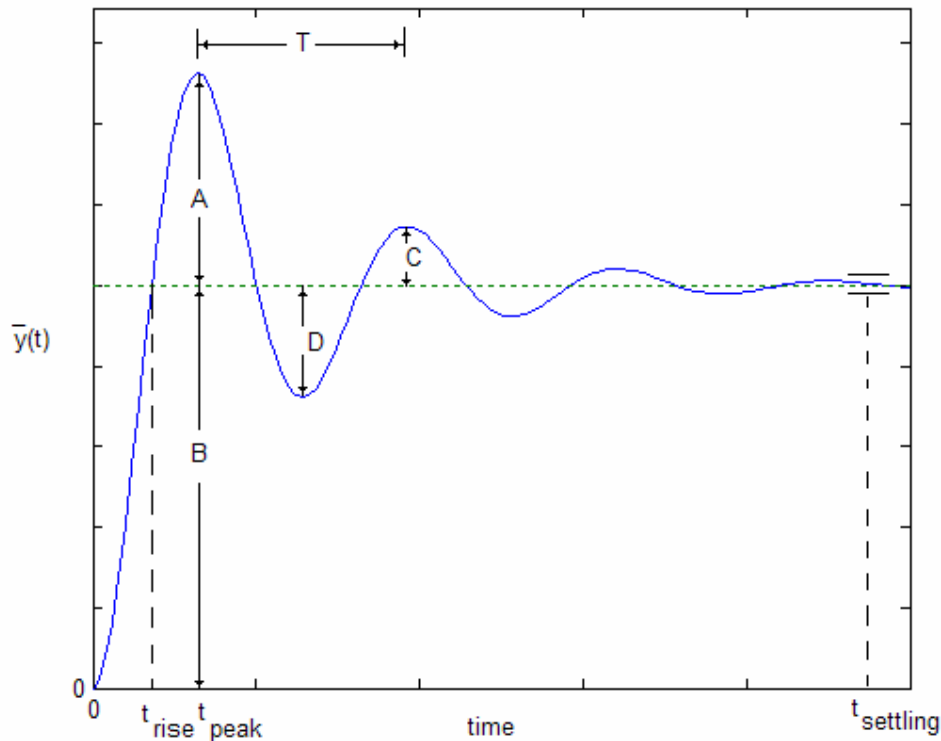
نکته ۴: به عبارت ξ/τ در توان تابع نمایشی دقت کنید. این عبارت، درست شبیه سیستم درجه اول (جمله $e^{-t/\tau}$) می‌باشد. در آنجا می‌گفتیم هر چه τ بزرگتر باشد (یا $1/\tau$ کوچکتر باشد) آنگاه جواب کندتر و لخت‌تر است. در اینجا نیز می‌گوییم هر چه ξ/τ کوچکتر باشد، سیستم سخت‌تر میرا می‌شود. تعبیر فیزیکی آن نیز بدین گونه است:

$$\begin{cases} \tau^2 = M/K \\ 2\xi\tau = C/K \end{cases} \Rightarrow \frac{2\xi\tau}{\tau^2} = \frac{2\xi}{\tau} = \frac{C/K}{M/K} = \frac{C}{M} \Rightarrow \frac{\xi}{\tau} \propto \frac{C}{M}$$

نسبت $\frac{C}{M}$ نمایانگر قدرت ضربه‌گیری یا ترمز و M بیانگر نوعی اینرسی و لختی سیستم می‌باشد. بدین ترتیب هر چه ضربه گیر یا ترمز نسبت به جرم بزرگتر باشد، پاسخ نوسانی باید سریعتر میرا شود و هر چه کوچکتر باشد (مثلاً آب به جای روغن ویسکوز یا گریس بریزیم) آنگاه خیلی سخت میرا می‌شود و بیشتر ماهیت نوسانی (فتری) دارد.

اصطلاحات پاسخ نوسانی میرا شونده

همانطور که قبلاً نیز گفته شد در کنترل فرآیندها، با این شکل از پاسخ بسیار روبرو خواهیم شد. پاسخ نوسانی میرا شونده دارای مشخصه‌ها و مولفه‌های مهمی می‌باشد که از نظر صنعتی و عبارات اپراتور فهم حائز اهمیت است. دقت کنید با مشاهده پاسخ نوسانی میرا شونده، الزاماً سیستم دارای دینامیک درجه دوم خالص نیست یا حتی در صورت مدل‌سازی دقیق نیز، معلوم نیست فقط مشتق مرتبه دوم ببینیم. درست مانند این است که هندوانه شریف آباد را با یک شکل هندسی معین نظیر کره یا استوانه تقریب بزیم یا نقشه (هوایی) کشور ایتالیا را با شکل چکمه مدل یا تجسم کنیم! به شکل ۲ مراجعه کرده و مشخصه‌های مهم آنرا بخاطر بسپارید. در ادامه، این اصطلاحات به ترتیب اهمیت طرح شده‌اند.



شکل ۲. پاسخ نمونه یک سیستم دینامیکی درجه دوم.

- **فرادفت یا اورشوت (overshoot)**: این مشخصه به طور کیفی میزان اوج پاسخ را از مقدار نهایی بیان می‌کند. از نظر تجربی و قضاوت گرافیکی، با مقدار $\frac{A}{B}$ یا به صورت درصد $100 \times \frac{A}{B}$ اندازه‌گیری می‌شود ولی به صورت نظری، با مشخصه ضریب میرایی ξ ، تابع انتقال به صورت زیر رابطه مند می‌شود:

$$\text{overshoot} = \exp\left(\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$

نکته ۵: به عبارت $\sqrt{1-\xi^2}$ دقت کنید و با $\sqrt{\xi^2-1}$ اشتباه نکنید، در صورتی که $\xi \geq 1$ باشد، آنگاه جواب نوسانی میراشونده نخواهد بود و لذا مساله اورشوت کاملاً بلاموضوع می‌شود.

نکته ۶: به حالت‌های $1 \rightarrow \xi$ و $0 \leftarrow \xi$ دقت کنید. وقتی ضریب میرایی بسیار کوچک و نزدیک صفر شود، آنگاه اورشوت به سمت 100% میل می‌کند و انگار که فنر غالب است و هیچ ضربه‌گیری و ترمزی نداریم. در حالت $1 \rightarrow \xi$ عکس این حالت صادق است. در صنعت، عدد 16% برای اورشوت (معادل $\xi = 0.504$) معقول و مقبولست و حداکثر مقدار 25% ($\xi = 0.404$) مجازست.

نکته ۷: اورشوت به τ بستگی ندارد! (چون برای سیستم فتر-ضربه‌گیر، به صورت $\sqrt{M/K}$ تعریف می‌شود)

- **آندرشوت** (undershoot): این مشخصه مانند فرافت، میزان حداکثر انحراف از مقدار نهایی را نشان می‌دهد، با این تفاوت که به جای اوج، میزان حسیض را نمایش می‌دهد.

$$\text{محاسبه گرافیکی} = \frac{D}{B} \times 100 \text{ یا } \frac{D}{B}$$

- **نسبت فروکش** (decay ratio): نسبت دومین اوج به اولین اوج، یک شاخصه مهم (ولی نه مستقل) از میزان میرایی دینامیک سیستم می‌باشد.

$$\text{محاسبه گرافیکی} = \frac{C}{A} \times 100 \text{ یا } \frac{C}{A}$$

$$\text{محاسبه نظری} = \exp\left(\frac{-2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$

نکته ۸: نسبت فروکش عملاً مربع اورشوت می‌باشد: نسبت فروکش یک چهارم، معادل 50% اورشوت است.

- **زمان خیز** (rise time): زمانی که پاسخ به مقدار بهره یکنواخت می‌رسد و از آن می‌گذرد.

$$t_{rise} = \frac{\tau \left[\pi - \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right) \right]}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

- **زمان اوج** (peak time): زمانی که پاسخ به اولین مقدار ماکزیمم خود می‌رسد: $t_{peak} = \frac{\tau\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}$

- **زمان پاسخ** (settling time): زمانی که پاسخ تقریباً به مقدار نهایی می‌رسد و در آن محدوده می‌ماند. منظور از تقریباً، مقدار عددی 95 درصدی (نوسان حول $\pm 5\%$ مقدار نهایی) یا 98 درصدی (نوسان حول $\pm 2\%$ مقدار نهایی) می‌باشد.

$$t_{ss} \cong \begin{cases} 3\tau / \xi & \text{for } \pm 5 \\ 4\tau / \xi & \text{for } \pm 2 \end{cases}$$

نکته ۹: زمان فرار (t_{rise}) را با زمان قرار (t_{ss} یا t_{settle}) اشتباه نکنید.

- **دوره تناوب نوسان**: از مقایسه پاسخ و آرگومان سنیوس داریم: $w\tau \equiv \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau} t$

به طوریکه w فرکانس نوسان (برحسب رادیان) می‌باشد و f فرکانس هرتز (عکس واحد زمان) می‌باشد:

$$w = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau} \Rightarrow (w = 2\pi f) \Rightarrow f = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{2\pi\tau}$$

در نتیجه دوره تناسب (برحسب واحد زمان) به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi\tau}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

نکته ۱۰: عبارت دوره تناوب را با زمان اوج مقایسه کنید؛ دوره تناوب می‌شود دو برابر زمان اوج!

- دوره طبیعی نوسان (فرکانس طبیعی). اصطلاح طبیعی به منزله نداشتن ضربه گیر یا ترمز می‌باشد تا با مفهوم محض و طبیعی نوسان بتوانیم مقایسه کنیم. از نظر محاسباتی بدین معنیست که انگار ضریب میرایی صفر باشد:

$$w_{natural} = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau} \Big|_{\xi=0} = \frac{1}{\tau} \Rightarrow f_{natural} = \frac{1}{2\pi\tau} \Rightarrow T_{natural} = 2\pi\tau$$

نکته ۱۱: نسبت دو فرکانس را محاسبه کنید، متوجه می‌شوید که برای $0.2 < \xi$ این دو مقدار تقریباً با هم برابرند.

$$\frac{f}{f_{natural}} = \sqrt{1-\xi^2}$$

پاسخ سیستم درجه دوم ($\xi < 1$) به ضربان ایده‌آل

روش استاندارد محاسبه، جاگذاری تبدیل لاپلاس تابع ضربان ایده‌آل و سپس معکوس گیری می‌باشد:

$$\bar{u}(s) = 1 \Rightarrow \bar{y}(s) = G(s)\bar{u}(s) = \frac{1}{\tau^2 s^2 + 2\tau\xi s + 1} \Rightarrow L^{-1}\{\dots\} \Rightarrow$$

$$\bar{y}(t) = \frac{1}{\tau\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi t/\tau} \sin\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau} t\right)$$

روش دوم، استفاده از قضیه یا خاصیت مشتق تبدیل لاپلاس می‌باشد:

$$\begin{cases} \bar{y}_1(s) = G(s)\bar{u}_1(s) \\ \bar{y}_2(s) = G(s)\bar{u}_2(s) \end{cases}, \quad \begin{cases} \bar{u}_1(s) = 1/s \quad (\text{step input}) \\ \bar{u}_2(s) = 1 \quad (\text{impulse input}) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \bar{y}_1(s) = (\text{step response}) \\ \bar{y}_2(s) = (\text{impulse response}) \end{cases} \Rightarrow \bar{y}_2(s) = s\bar{y}_1(s) \Rightarrow \bar{y}_2(t) = \frac{d\bar{y}_1}{dt}$$

به عبارت دیگر، پاسخ ضربان ایده‌آل، همان مشتق پاسخ پله می‌باشد.

نکته ۱۲: روش دوم، اساس محاسبات ساده و مشخصه سازی پاسخ سیستم درجه دوم نظیر اورشوت و نسبت فروکش می‌باشد، اگر پاسخ ایمپالس را مساوی صفر قرار دهیم، بدین معنیست که مشتق پاسخ پله را مساوی صفر قرار داده‌ایم، یعنی می‌توان زمان‌هایی که پاسخ پله اکستریم (مینیمم و ماکزیمم) می‌شود را بدست آورد:

$$\sin\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau} t\right) = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau} t = k\pi \Rightarrow t = \frac{k\pi\tau}{\sqrt{1-\xi^2}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

به‌طور مثال، در حالت $k = 0$:

$$k = 0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow \left. \frac{d\bar{y}_1}{dt} \right|_{t=0} = 0$$

یعنی سیستم درجه دوم، برخلاف سیستم درجه اول، در لحظه $t = 0$ بر محور افقی (زمان) مماس می‌باشد!

برای $k = 1$ ، دومین اکستریم رخ می‌دهد، یعنی زمان اوج را می‌توان بدست آورد:

$$k = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi\tau}{\sqrt{1-\xi^2}} \equiv t_{peak}$$

برای $k = 2$ ، سومین اکستریم، یا اولین آندرشوت رخ می‌دهد:

$$k = 2 \Rightarrow t = \frac{2\pi\tau}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

با جاگذاری این زمان در پاسخ پله، مقدار پاسخ پله در اولین حضيض بدست می آید.

برای $k=3$ ، چهارمین اکستریم، یا زمان دومین اوج بدست می آید.

$$k=3 \Rightarrow t = \frac{3\pi\tau}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

پاسخ ضربان ایده آل برای $\xi=1$ ، برای محاسبه این نوع پاسخ نیز می توان با مشتق پاسخ پله در حالت $\xi=1$ ، به عبارت مورد نظر رسید:

$$\bar{y}(t) = \left(\frac{t}{\tau}\right) e^{-t/\tau}$$

پاسخ ضربان ایده آل برای $\xi > 1$. به طور مشابه، نیز می توان با مشتق گیری پاسخ پله در حالت $\xi > 1$ ، به عبارت مربوطه رسید:

$$\bar{y}(t) = \left(\frac{1}{\tau\sqrt{\xi^2-1}}\right) e^{-\xi t/\tau} \sinh\left(\frac{\sqrt{\xi^2-1}}{\tau} t\right)$$

نکته ۱۳: پاسخ ضربان ایده آل، برای متغیر انحرافی همیشه به صفر می گردد و مقدار نهایی موضوعیت ندارد.

نکته ۱۴: بحث بهره یکنواخت، فقط برای پاسخ پله تعریف می شود، نه ضربان، نه سینوس و نه هیچ ورودی دیگر.

نکته ۱۵: تعاریف اورشوت و آندرشوت و برخی دیگر نیز متناسب با ضربان ایده آل تعریف می شوند.

سیستم درجه دوم، پاسخ سینوسی برای $\xi < 1$

برای محاسبه به روش معمول عمل می کنیم، یعنی لاپلاس ورودی سینوس را در تابع انتقال درجه دوم ضرب کرده و از آن تبدیل معکوس می گیریم:

$$\bar{u}(t) = A \sin(\omega t) \Rightarrow \bar{u}(s) = \frac{Aw}{s^2 + \omega^2} \Rightarrow \bar{y}(s) = G(s)\bar{u}(s) = \frac{Aw}{s^2 + \omega^2} \frac{1}{\tau^2 s^2 + 2\tau\xi s + 1} \Rightarrow L^{-1}\{\dots\} \Rightarrow$$

$$\bar{y}(t) = B \sin(\omega t + \phi) + e^{-\xi t/\tau} \left\{ C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau} t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau} t\right) \right\}$$

شایان ذکرست برای جلوگیری از پیچیده شدن عبارات پاسخ فرکانسی، ضرایب C_1 و C_2 را نمی نویسیم، چون برای پاسخ فرکانسی، مهم پاسخ ماندگار می باشد، وقتی $t \rightarrow \infty$ باشد، فاکتور سمت راست (فاکتور $e^{-\xi t/\tau}$) صفر شده و فقط عبارت اول می ماند.

$$\bar{y}(t) = B \sin(\omega t + \phi) \quad (\text{برای } t \text{ های بزرگ})$$

به طوریکه

$$B = \frac{A}{\sqrt{[1-\omega^2\tau^2]^2 + 4\xi^2\omega^2\tau^2}}, \quad \phi = -\tan^{-1}\left(\frac{2\xi\tau\omega}{1-\omega^2\tau^2}\right)$$

نکته ۱۶: نسبت دامنه های خروجی به ورودی (یعنی B/A) را برای دو سیستم درجه اول و درجه دوم مقایسه کنید. برای سیستم درجه دوم، مقدار B/A می تواند در شرایط خاصی بزرگتر از ۱ نیز باشد (!) در حالیکه در سیستم درجه اول این

مقدار همیشه کوچکتر از واحد می‌باشد و به عبارتی سیستم درجه اول همیشه سیگنال ورودی را تضعیف می‌کند و تشدید ندارد.

نکته ۱۷: در مقایسه با سیستم درجه اول، پس فاز در سیستم درجه دوم تا 180° - هم می‌تواند مقدار بگیرد، در حالی که در سیستم درجه اول، حداکثر تا 90° - می‌رسد.

نکته ۱۸: پاسخ سیستم درجه دوم برای $\xi = 1$ و $\xi > 1$ نکته خاصی ندارد و برای محاسبه آنها، باید همان روش استاندارد (تبدیل معکوس) را دنبال کنیم.

مقدمه

در کنار دو سیستم معروف درجه اول و درجه دوم، سیستم‌های دیگری نیز وجود دارند که هم از نظر مفهومی و تحلیلی حائز اهمیت هستند و هم از نظر طراحی و تعبیر و تفسیر عملکرد کنترلر. در این بخش به این سیستم‌ها همراه با مثال‌ها و نمونه‌های فیزیکی می‌پردازیم. شایان ذکر است که باید به ساختار تابع انتقال هر کدام از این سیستم‌ها توجه ویژه‌ای قائل شد تا ترمینولوژی و قاموس کنترل خطی به‌طور یکدست فهم شود.

سیستم‌های بهره محض یا جبری (pure gain)

یک سیستم درجه اول را در نظر بگیرید که ثابت زمانی (τ) آن صفر باشد. یک چنین سیستمی در دنیای خارج وجود ندارد، چون به طور جهشی به ورودی خود پاسخ گفته و هیچ اینرسی و دینامیک خاصی را از خود بروز نمی‌دهد. معذک که برای نمایش سیستم‌های بسیار سریع (τ خیلی کوچک) می‌توان با تقریب مهندسی آنها را بهره محض فرض کرد. اگر $\bar{y}(t)$ خروجی (به صورت متغیر انحرافی) سیستم بهره محض باشد، آنگاه رابطه آن با ورودی (به صورت متغیر انحرافی) به شکل زیر خواهد بود:

$$\bar{y}(t) = K \bar{u}(t)$$

و با تبدیل لاپلاس گرفتن:

$$\bar{y}(s) = K \bar{u}(s) \Rightarrow G(s) = K$$

بنابراین تابع انتقال سیستم فقط با یک مشخصه، یعنی مقدار بهره K شناسایی و معرفی می‌شود. از نمونه‌های فیزیکی این نوع سیستم‌ها می‌توان سنسورهای سریع نظیر دماسنج‌های ترموکوپل، RTD و فشارسنج‌ها را نام برد. همچنین شیرهای کنترلی با سایز کوچک و حتی کنترلرهای ساده تناسبی نیز، این رفتار جبری را از خود نشان می‌دهند. نکته ۱: همان‌طور که خواهیم دید یک سیستم مدار بسته کنترلی متشکل از اجزای متعددی نظیر خود فرآیند، سنسور، شیر کنترل و کنترلر می‌باشد. منظور از رفتار تناسبی مثلاً شیر کنترل، کوچک بودن ثابت زمانی آن (در حدود چندثانیه) در برابر ثابت زمانی فرآیند (در مرتبه ساعت) می‌باشد.

سیستم‌های انتگرال محض یا خازنی (pure capacity)

اگر در سیستم مدار الکتریکی مقاومت اهمیت و وجود نداشته باشد یا در فرایند دینامیکی سطح مایع مقاومت هیدرولیکی (شیر) وجود نداشته و تخلیه با نرخ ثابت (به وسیله پمپ) انجام پذیرد، آنگاه سیستم به صورت خازنی عمل کرده و رفتار دینامیکی محدودی از خود بروز نمی‌دهد. اگر معادلات دیفرانسیل این سیستم‌ها را بنویسیم متوجه می‌شویم که فقط مشتق تابع حضور دارد و اثری از مقدار تابع نیست و در نتیجه با تبدیل لاپلاس گرفتن به تابع انتقال زیر می‌رسیم:

$$G(s) = \frac{K}{s}$$

سیستم‌های دینامیکی پس و پیش یا متقدم و متاخر (lead/lag)

به‌طور کلی سیستم‌هایی با تابع انتقال زیر موسوم به سیستم‌های دارای هم تاخیر زمانی و هم تقدم زمانی هستند:

$$G(s) = K \frac{\tau_1 s + 1}{\tau_2 s + 1}$$

تفاوت اصلی این سیستم‌ها با سیستم‌های درجه اول، حضور چندجمله‌ای مرتبه اول در صورت کسر تابع انتقال می‌باشد. از نظر ریاضی این سیستم ولو اینکه علی می‌باشد ولی اکیداً سره (strictly proper) نیست چون کسر گویای (rational) تابع انتقال $G(s)$ شامل دو چندجمله‌ای هم مرتبه در صورت و مخرج می‌باشد. می‌توان ثابت کرد که اگر ورودی از نوع پله باشد آنگاه خروجی نیز در لحظه صفر دارای جهش است و این نکته، با سیستم‌های طبیعی که دارای اینرسی هستند و باید تکاملی تغییر کنند (با شیب صفر یا شیب محدود) سنخیت ندارد. این موضوع را می‌توان با روابط ریاضی زیر نیز طرح کرد:

$$G(s) = K \frac{\xi s + 1}{\tau s + 1} = K \left[A_0 + \frac{A_1}{\tau s + 1} \right]$$

به طوریکه:

$$A_0 \triangleq \frac{\xi}{\tau} = \rho, \quad A_1 \triangleq 1 - \frac{\xi}{\tau} = 1 - \rho$$

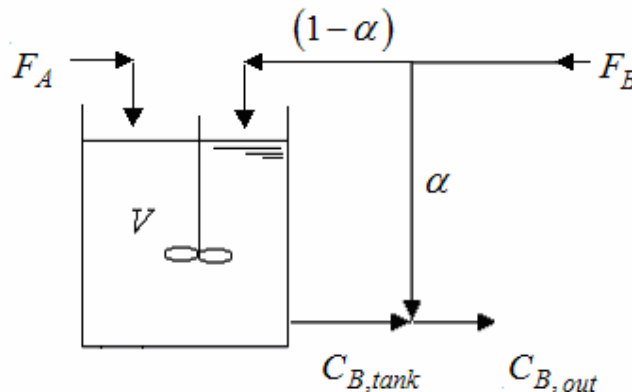
در نتیجه پاسخ یک چنین سیستمی به صورت زیر خواهد بود:

$$\bar{y}(s) = G(s)\bar{u}(s) = \left[\rho K + (1 - \rho) \frac{K}{\tau s + 1} \right] \bar{u}(s)$$

در نتیجه دو نکته مهم زیر از رابطه بالا ظاهر می‌شوند:

- ۱- پاسخ $\bar{y}(s)$ دارای یک قسمت جبری است یعنی جهش و بدون دینامیک جواب می‌دهد.
- ۲- پاسخ $\bar{y}(s)$ یک متوسط جبری وزن داده شده (با ρ و $1 - \rho$) از دو سیستم جبری محض و تاخیر درجه اول می‌باشد. عبارت یا فاکتور وزن ρ معروف به نسبت تقدم به تاخر (lead-to-lag-ratio) می‌باشد. به مثال فرآیندی زیر (شکل ۱) که دارای تابع انتقال lead-lag می‌باشد توجه کنید. فرایند شامل یک تانک اختلاط به حجم V می‌باشد. ورودی‌های این تانک شامل یک جریان با دبی F_A از ماده A و یک کسری از جریان با دبی F_B از ماده B (نظیر رنگ یا کاتالیست) می‌باشد. برای سوئیچ سریع از یک جریان به جریان دیگر، طراح فرایند آرایش پیش اختلاط - پس اختلاط را توصیه کرده است یعنی از جریان ماده B بخشی از آن را مستقیماً با خروجی مخلوط می‌کند و بخش دیگر را به طرف تانک برای اختلاط با جریان A می‌فرستد. می‌خواهیم رفتار دینامیکی تغییر غلظت $C_{B,out}$ را نسبت به تغییر در شدت جریان A (یعنی F_A) بدانیم:

$$B \text{ موازنه جرم جزئی روی } V: \quad V \frac{dC_{B,tank}}{dt} = (1 - \alpha) F_B C_{B,feed} - [F_A + (1 - \alpha) F_B] C_{B,tank}$$



شکل ۱. شماتیک فرآیند اختلاط.

در نقطه اختلاط (بیرون تانک) می توان به خاطر دینامیک بسیار سریع آن (حجم اختلاط در نقطه تقارب لوله ها بسیار کوچک است) رابطه موازنه جرم را در حالت یکنواخت نوشت:

$$C_{B,out} = \frac{[F_A + (1-\alpha)F_B]C_{B,tank} + \alpha F_B C_{B,feed}}{F_A + F_B}$$

اگر فرض کنیم دبی جریان ماده A از دبی جریان ماده B بسیار بزرگتر است ($F_A \gg F_B$) آنگاه تعریف ثابت زمانی τ

$$\tau \triangleq V/F_A \quad \text{را به شکل زیر انجام می دهیم:}$$

و با همین فرض می توان تقریب زیر را در نظر گرفت:

$$F_A + F_B \approx F_A + (1-\alpha)F_B \approx F_A$$

و در نتیجه مدل فرآیند (رابطه پیش گفته موازنه های جرم) به صورت زیر ساده می شود:

$$\begin{cases} \tau \frac{dC_{B,tank}}{dt} = \frac{(1-\alpha)F_B}{F_A} C_{B,feed} - C_{B,tank} \\ C_{B,out} = C_{B,tank} + \alpha \left(\frac{F_B}{F_A} \right) C_{B,feed} \end{cases}$$

حال کتبیات انحرافی زیر را تعریف می کنیم:

$$\begin{cases} \bar{u} = \frac{F_B}{F_A} C_{B,feed} - \frac{F_B}{F_A} C_{B,feed} \Big|_{ss} \\ C_{B,out} \bar{y} = C_{B,out} - C_{B,out} \Big|_{ss} \\ \bar{x} = C_{B,tank} - C_{B,tank} \Big|_{ss} \end{cases}$$

روابط بالا برحسب متغیرهای انحرافی مساله به شکل زیر در می آیند:

$$\begin{cases} \tau \frac{d\bar{x}(t)}{dt} = (1-\alpha)\bar{u}(t) - \bar{x}(t) \\ \bar{y}(t) = \bar{x}(t) + \alpha\bar{u}(t) \end{cases}$$

با تبدیل لاپلاس گرفتن:

$$\begin{cases} \bar{x}(s) = \frac{1-\alpha}{\tau s + 1} \bar{u}(s) \\ \bar{y}(s) = \bar{x}(s) + \alpha\bar{u}(s) = \left[\alpha + \frac{1-\alpha}{\tau s + 1} \right] \bar{u}(s) \end{cases}$$

حال اگر α را همان نسبت تقدم و تاخر ($\alpha \triangleq \xi/\tau$) بگیریم تابع انتقال فرایند به صورت زیر در می آید (بهره واحد):

$$\frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)} = \frac{\xi s + 1}{\tau s + 1}$$

سیستم های مرتبه بالاتر همراه با چند جمله ای صورت - همان طور که در بخش های قبل برای سیستم های

متوالی دیدیم ممکن است بر اثر توالی دینامیک های مثلا درجه اول به سیستم های کلی برسیم که درجه مخرج بزرگتر از ۲ (یا مساوی ۲) و درجه صورت بزرگتر از صفر باشد. لذا از نظر ریاضی این سیستم ها را به صورت کلی زیر نمایش می دهند: (منظور از صفر و قطب ریشه های چندجمله ای صورت و مخرج به ترتیب می باشند)

$$\begin{aligned} \text{نمایش صفر و قطب} \quad G(s) &= K \frac{(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} \\ \text{نمایش چندجمله‌ای} \quad G(s) &= \frac{s^m + b_1s^{m-1} + \cdots + b_m}{s^n + a_1s^{n-1} + \cdots + a_n} \\ \text{نمایش متقدم - متاخر (ثوابت زمانی)} \quad G(s) &= K \frac{(\xi_1s+1)(\xi_2s+1)\cdots(\xi_ms+1)}{(\tau_1s+1)(\tau_2s+1)\cdots(\tau_ns+1)} \end{aligned}$$

شایان ذکر است که برای سیستم‌های طبیعی همیشه $m \leq n$ می باشد و به تفاضل $n-m$ رتبه نسبی می گویند. برای بیان این نوع سیستم‌ها - جهت حفظ یکپارچگی - از همان ایندکس‌ها یا درجه مخرج و صورت استفاده می کنند. به طور مثال سیستم متقدم و متاخر پیش گفته را یک سیستم درجه (۱) می نامند و سیستمی که دو قطب (دو ریشه در مخرج) و یک صفر (یک ریشه در صورت) داشته باشد، سیستم یا تابع انتقال درجه (۱) می گویند. وجود صفر در صورت یک تابع انتقال گویا (rational) از نظر پایداری اهمیت ثانویه داشته، حال آنکه در برخی حالات خاص در پایداری، عملکرد و پاسخ می تواند نقش تعیین کننده‌ای داشته باشد. به طور مثال پاسخ پله یک سیستم نمونه درجه (۱) را تحت مطالعه و بررسی قرار می دهیم:

$$G(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{u}(s)} = \frac{K(\xi_1s+1)}{(\tau_1s+1)(\tau_2s+1)}$$

پاسخ لاپلاس این سیستم به پله واحد به شکل زیر می باشد:

$$\bar{y}(s) = \frac{K(\xi_1s+1)}{(\tau_1s+1)(\tau_2s+1)} \times \frac{1}{s} = K \left[\frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{\tau_1s+1} + \frac{A_2}{\tau_2s+1} \right]$$

پس از معلوم شدن ثوابت:

$$A_0 = 1, \quad A_1 = \frac{-\tau_1(\tau_1 - \xi_1)}{\tau_1 - \tau_2}, \quad A_2 = \frac{-\tau_2(\tau_2 - \xi_1)}{\tau_2 - \tau_1}$$

می توان تبدیل معکوس گرفته و پاسخ \bar{y} را در دامنه زمان بدست آورد:

$$\bar{y}(t) = K \left[1 - \left(\frac{\tau_1 - \xi_1}{\tau_1 - \tau_2} \right) e^{-t/\tau_1} - \left(\frac{\tau_2 - \xi_1}{\tau_2 - \tau_1} \right) e^{-t/\tau_2} \right]$$

حال اگر همین پاسخ را با پاسخ سیستم درجه (۲) مقایسه کنیم ($\xi_1 = 0$) به خوبی اثر صفر (حضور ξ_1) را مشاهده می کنیم:

$$\bar{y}(t) = K \left[1 - \left(\frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \right) e^{-t/\tau_1} - \left(\frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} \right) e^{-t/\tau_2} \right]$$

دقت کنید ξ_1 در ترم‌های نمایی ظاهر نمی شود بلکه معادله و میزان رقابت دو جمله نمایی را عوض می کند!

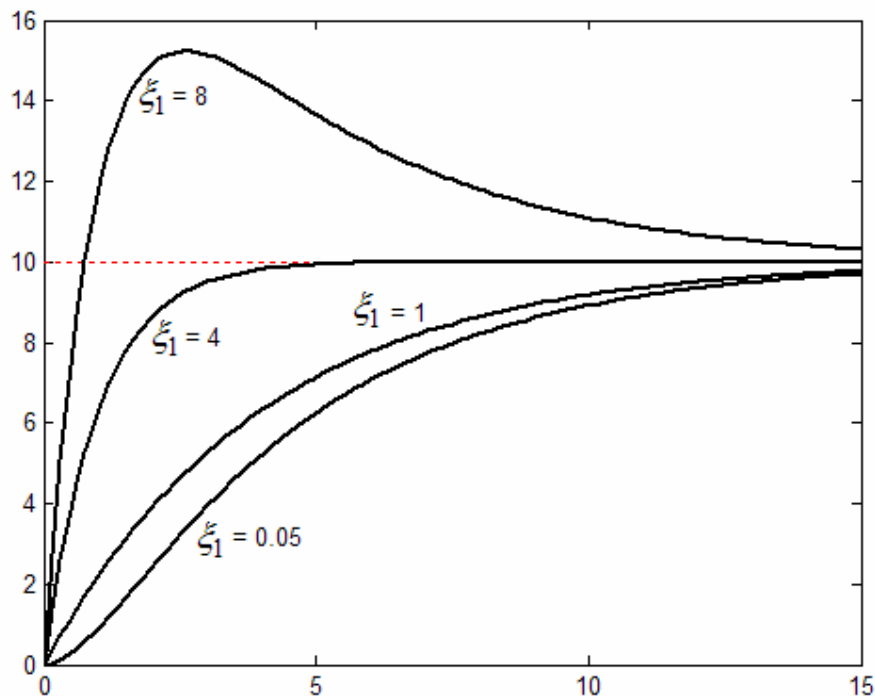
برای بررسی بیشتر، فرض کنید τ_1 و τ_2 به طور صعودی مرتب شده اند یعنی $\tau_1 < \tau_2$ ، آنگاه با توجه به مقادیر مختلف ξ_1 تغییر فرم پاسخ را تحلیل می کنیم:

حالت اول: $\xi_1 > \tau_2$ ، در این حالت می توان ثابت کرد که در لحظاتی پاسخ از مقدار نهایی K بیشتر می شود، یعنی پاسخ شامل اورشوت است ولی آندرشوت ندارد! این بدان معنی است که اوج گرفتن و بیشتر شدن مقدار لحظه‌ای $\bar{y}(t)$ الزاما به خاطر وجود ریشه های کمپلکس در مخرج تابع انتقال نیست!

حالت دوم: $\xi_1 = \tau_2$ یا $\xi_1 = \tau_1$ ، در این حالت صفر صورت با صفر مخرج (یا همان قطب) حذف شده و سیستم درجه (۱) به یک سیستم درجه (۱) تبدیل می شود. پس پاسخ به صورت نهایی با ثابت زمانی τ_1 یا τ_2 ظاهر می شود.

حالت سوم: $0 < \zeta_1 < \tau_2$ در این حالت سیستم اورشوت نشان نمی‌دهد و تقریباً رفتاری شبیه رفتار سیستم درجه اول دارد (چون تابع انتقال دارای رتبه نسبی ۱ می‌باشد). به شرط مثبت بودن ζ_1 دقت کنید، اگر ζ_1 منفی باشد وارد بحث پاسخ معکوس خواهیم شد که بعداً شرح می‌شود.

سه حالت بالا برای یک سیستم نمونه با $\tau_1 = 1$ و $\tau_2 = 4$ و $K = 10$ برای مقادیر مختلف ζ_1 در شکل ۲ رسم شده است.



شکل ۲. رفتار یک سیستم درجه (۲و۱).

سیستم‌های با پاسخ معکوس (Inverse-response systems)

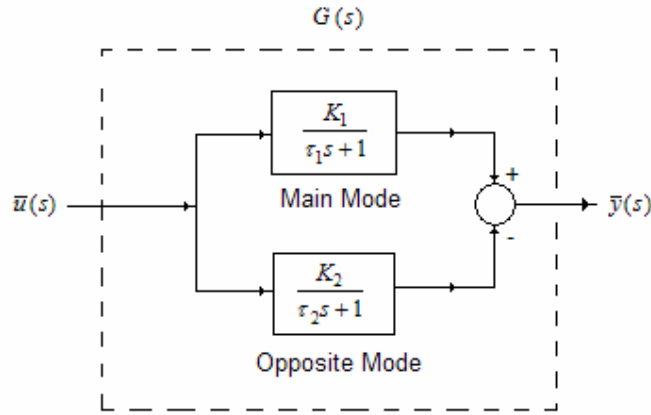
اگر جهت پاسخ پله سیستمی در ابتدا و لحظات اولیه (فرار) عکس جهتی باشد که در نهایت (قرار) به آن می‌رسد، آنگاه موسوم به سیستم با پاسخ معکوس می‌شود. می‌توان نشان داد جهت شناسایی و پیش بینی این رفتار قبل از آزمایش یا بدون آزمایش تجربی و فقط با بازبینی تابع انتقال باید به وجود یا حضور ریشه‌های مثبت در صورت تابع انتقال توجه کرد. در بخش قبل تمام صفرهای صورت تابع انتقال منفی بودند (در حالت ریشه کمپلکس، منظورمان منفی بودن قسمت حقیقی ریشه می‌باشد) برای ورود به مطلب یک سیستم نمونه مثل $G(s)$ را در نظر بگیرید:

$$G(s) = G_1(s) - G_2(s)$$

وجود علامت منفی به نوعی رقابت بین دو دینامیک تند و کند را تداعی می‌کند و در نتیجه احتمال پاسخ معکوس را زیاد می‌کند یا مستعد می‌سازد. علت بدین خاطر است که مود دینامیکی دوم (یعنی $G_2(s)$) در رقابت یا خلاف جهت مود دینامیکی اول (یعنی $G_1(s)$) عمل می‌کند. معمولاً به $G_1(s)$ مود اصلی و به $G_2(s)$ مود متضاد یا مخالف می‌گوییم. به شکل ۳ رجوع کرده و یک مثال ساده از این تقابل را ملاحظه کنید:

$$G(s) = \frac{K_1}{\tau_1 s + 1} - \frac{K_2}{\tau_2 s + 1}$$

طبق تعریف (استاندارد) فرض می‌کنیم K_1 و K_2 هر دو مثبت هستند و بهره‌موند اصلی K_1 از بهره‌موند متضاد K_2 بزرگتر می‌باشد.



شکل ۳. یک سیستم رقابتی دارای پاسخ معکوس.

حال به طور استثنایی نیز می‌توان دریافت که بسته به مقادیر τ_1 و τ_2 ممکن است در لحظات اولیه، مود مخالف از مود اصلی جلو بزند ولی در نهایت عقب بیفتد. به هر حال اگر بخواهیم به طور کمی و دقیق به این مساله پردازیم، به پاسخ پله (پاسخ پایه) پرداخته و رفتار یکنواخت و دینامیکی آن را بررسی می‌کنیم. مقدار نهایی پاسخ پله واحد از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\bar{y}(\infty) = G(0) = G_1(0) - G_2(0) = K_1 - K_2$$

و چون فرض کردیم $K_1 > K_2$ لذا مقدار نهایی یک مقدار مثبت می‌باشد. حال به مقدار شیب اولیه پاسخ می‌پردازیم:

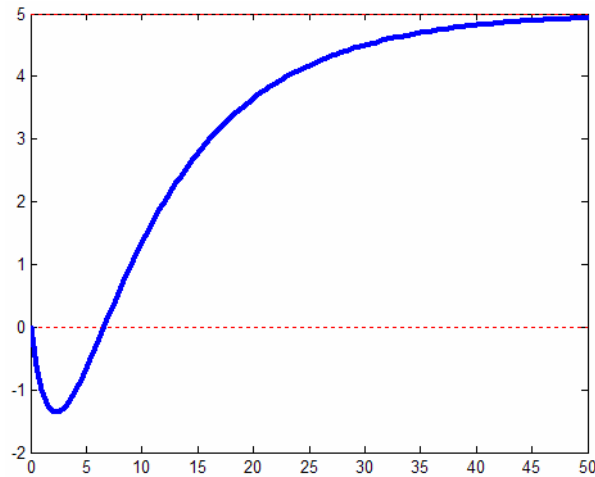
$$\left. \frac{d\bar{y}}{dt} \right|_{t=0} = \left(\left. \frac{d\bar{y}_1}{dt} - \frac{d\bar{y}_2}{dt} \right) \right|_{t=0} = \frac{K_1}{\tau_1} - \frac{K_2}{\tau_2}$$

در نتیجه اگر نسبت k_1/τ_1 کوچکتر از نسبت k_1/τ_2 باشد آنگاه شیب مربوطه منفی شده و منجر به پاسخ معکوس

می‌شود (شکل ۴ را ببینید). برای مثال استاندارد خودمان (یعنی $k_1/k_2 > 1$)، شرط بالا ساده‌تر شده و به صورت $\tau_2 < \tau_1$

$$\frac{K_1}{\tau_1} < \frac{K_2}{\tau_2} \Rightarrow \left(\frac{K_1}{K_2} > 1 \right) \Rightarrow 1 < \frac{\tau_1}{\tau_2} \Rightarrow \tau_2 < \tau_1$$

درمی‌آید:

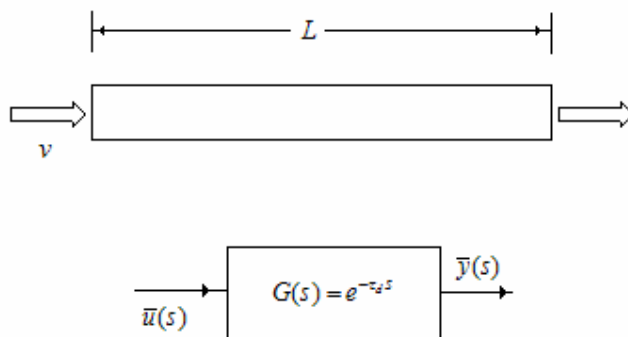


شکل ۴. پاسخ پله یک سیستم رقابتی دارای پاسخ معکوس.

این شرط معقول و معتبر است چون دارای تعبیر فیزیکی می باشد. در بحث سیستم های درجه اول، هر چه τ یا ثابت زمانی کوچکتر باشد، سیستم دارای دینامیک سریع تر می باشد. لذا مود مخالف (با ثابت زمانی τ_2) در لحظات اولیه از خود تندی و تیزی بیشتر نشان می دهد و از \bar{y}_1 (مود اصلی) جلوتر می افتد ولی در نهایت چون دارای بهره کوچکتری است به مقدار کمتری از \bar{y}_2 همگرا یا یکنواخت می شود.

سیستم های دارای تاخیر محض (pure lag system)

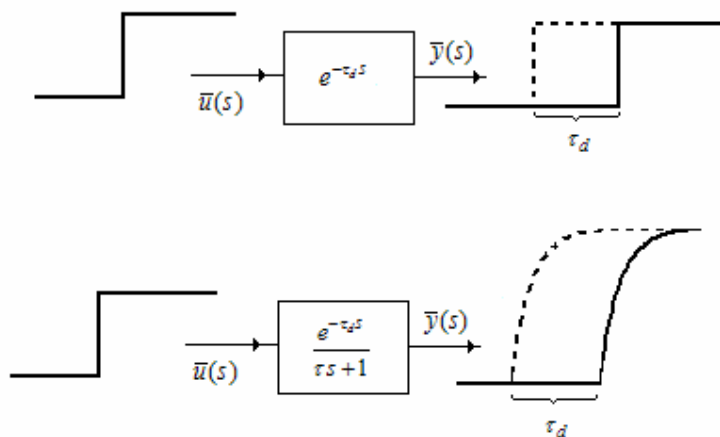
این نوع سیستم ها بعد از تغییر در ورودی بلافاصله شروع به تغییر نمی کنند و انگار دارای نوعی حافظه و هوشمندی بوده به طوری که بعد از مدت زمان محدودی، شروع به انفعال و پاسخ می کنند. در فرآیندهای واقعی این رفتار موسوم به تاخیر انتقالی (transport delay) در سیستم های جریان دار، و تاخیر اندازه گیری (measurement lag) در سنسورهای نمونه برداری (مثل آنالیزور غلظت و GC) هستند. برای سیستم های جریان دار مقدار این تاخیر به طور تقریبی با L/v بیان می شود به طوری که L طول لوله و v سرعت خطی سیال در لوله می باشد (شکل ۵). برای سیستم های اندازه گیری نیز مقدار تاخیر توسط سازنده اعلام می شود، چون تقریباً معادلست با زمان پردازش نمونه.



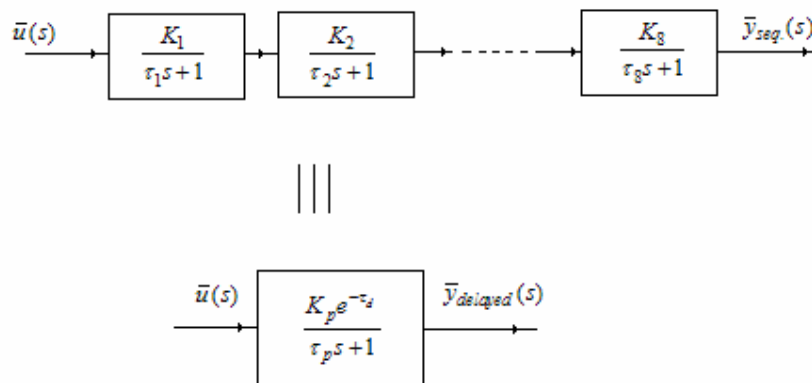
شکل ۵. سیستم تاخیر انتقالی و تابع انتقال تاخیر محض.

تابع انتقال سیستم تاخیری به صورت نمایی می باشد (شکل ۵) و همان طور که ملاحظه می شود یک تابع انتقال گویا نیست، یعنی s به توان نرسیده است و بلکه خود s در توان ظاهر شده است. پاسخ سیستم های حاوی تاخیر محض دقیقاً مثل ورودی می باشد، با این تفاوت که τ_d لحظه بعد شروع به تغییر می کند (شکل ۶).

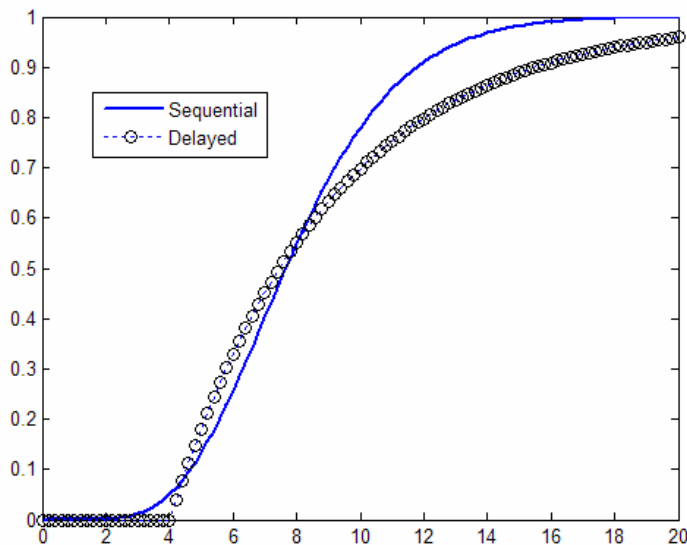
لازم به ذکر است که وجود $e^{-\tau_d s}$ در یک تابع انتقال ترکیبی الزاماً به مفهوم تاخیر انتقالی نیست و بلکه شاید به خاطر ساده سازی و مدل سازی تجربی باشد. به طور مثال ممکن است یک سیستم متوالی و متشکل از ۸ سیستم درجه اول را با یک تابع انتقال درجه اول همراه با تاخیر زمانی (time delay) تقریب بزنیم (به شکل های ۷ و ۸ رجوع کنید).



شکل ۶. سیستم تاخیر انتقالی محض.



شکل ۷. معادل سازی تقریبی یک سیستم درجه هشتم با یک سیستم درجه اول همراه با تاخیر انتقالی.



شکل ۸. مقایسه پاسخ پله سیستم درجه هشتم با سیستم درجه اول همراه با تاخیر انتقالی.

تقریب Pade - در بسیاری از مطالعات تحلیلی و طراحی ممکن است بخواهیم با چند جمله‌ای‌ها کار کنیم و وجود جمله‌نمایی مثل $e^{-\tau_d s}$ یک وصله ناجور به‌شمار آید. یک راه متداول برای تقریب جمله‌نمایی با چند جمله‌ای استفاده از تقریب Pade درجه اول می‌باشد:

$$e^{-\tau_d s} = \frac{e^{-\tau_d s/2}}{e^{+\tau_d s/2}} \approx \frac{1 - \frac{\tau_d}{2}s}{1 + \frac{\tau_d}{2}s} = \frac{2 - \tau_d s}{2 + \tau_d s}$$

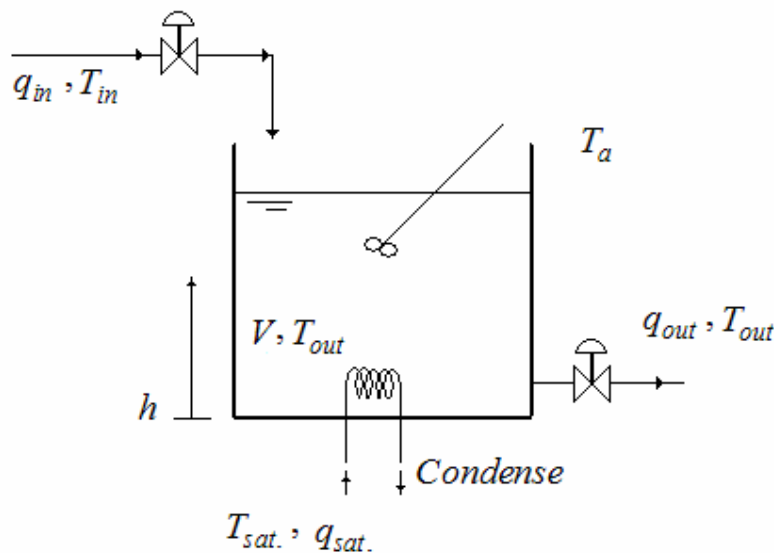
دقت شود که شکستن عبارت توان به دو تکه نیمه، به‌خاطر بالابردن دقت تقریب می‌باشد.

مقدمه

یک سیستم کنترل، عملاً مرکب از اجزاء و مفردات خاصی است که هر کدام از آنها وظیفه و عملکرد خاصی را عهده دار هستند. مهم ترین عناصر یک حلقه مدار بسته کنترلی عبارتند از خود فرآیند، عنصر اندازه گیری (سنسور)، کنترلر و عامل تغیر دهنده کمیت کنترل کننده (معمولاً شیر کنترل). خود فرآیند دارای یک دینامیک ذاتی و طبیعی بوده و در قاموس مهندسی سیستم‌ها، موسوم به سیستم مدار باز می‌باشد، مطالعه دینامیک فرآیند اعم از مدل‌سازی (چه نظری و چه تجربی) و مشخصه‌سازی آن، دارای مقام کشف و انکشاف است. این بدین معنیست که وظیفه ما، فقط شناسایی و توصیف رفتار دینامیکی آن می‌باشد. برای دستکاری در عملکرد آن باید از مجموعه کنترلر- سنسور استفاده کنیم. دقت شود که تغیر کمیت کنترل‌شونده به طور دستی و مستقیم معمولاً سخت، پرهزینه و حتی غیر ممکن می‌باشد. لذا، مجبوریم به این شعار کنترلی تن در دهیم که می‌گوید: تغیر در کمیت کنترل‌شونده، به طور غیرمستقیم و از طریق تغیر دیگری بنام تغیر کنترل کننده ممکن می‌باشد.

مطالعه دینامیک کنترلر اعم از طراحی و تنظیم آن، دارای مقام سنتز و اختراع است. این بدان معنیست که وظیفه ما ساختن یک دینامیک تصنعی براساس دانسته‌های قبلی از دینامیک سیستم‌ها می‌باشد.

مثال انگیزشی، تانک پیش گرمکن - برای طرح مباحث سیستم مرکب کنترل مدار بسته، از یک عملیات واحد ساده نظیر تانک پیش گرمکن (شکل ۱) استفاده می‌کنیم. آبجکتو کنترلی این واحد فرآیندی (یوتیلیتی) عبارت است از تامین جریان خروجی از تانک با دمای طراحی و مقرر T_{out}^{sp} .



شکل ۱- نمودار جریان (شماتیک) یک تانک پیش گرمکن.

نکته ۱- هر پروژه فنی با مقیاس متوسط به بالا حتماً کار تیمی می‌طلبد. ترکیب حداقلی گروهی این تیم برای فرآیندهای مهندسی شیمی شامل مدیران (میانی)، اپراتورها (تکنسین‌ها) و مهندسین می‌باشد. برای پیشبرد پروژه (اعم از طراحی اولیه، تفصیلی و بازسازی) این سه زیر مجموعه باید دارای تعامل و گفت‌وگو منطقی- مهندسی باشند. این تعامل از نظر حقوقی و

ثبت گردش کاری نیازمند مستندات خاصی می‌باشد. مستندات مدیریتی شامل متون مصوب و صورت‌جلسات مربوطه بوده و توعاً شامل آیدجتیوهای طراحی و کنترلی می‌باشد. به عبارت دیگر مستندات و نقشه‌های مدیریتی در قالب عبارات و کلمات بوده و دارای شان و قضاوت کیفی می‌باشند. وجه دیگر این تعامل مثلثی، اپراتورها می‌باشند. نقشه‌های اپراتور-فهم در قالب دیاگرام‌های جریان (موسوم به PFD) و ابزار دقیق (موسوم به P&ID) می‌باشند. نقشه‌های تخصصی کنترل نیز شامل بلوک دیاگرام‌ها و نمودارهای عملکرد می‌باشند. برای مثال حاضر، جمله اخیر مبنی بر تعریف آیدجتیو کنترلی دارای شان مدیریت و طراحی کیفی بوده و شرح قضیه در قالب PFD (شکل ۱) دارای مراتب تفهیمی برای اپراتورها می‌باشد.

گام اول - برای تامین آیدجتیو کنترلی، ابتدا باید متغیرهای دست اندرکار را شناسایی کرد. از مجموعه متغیرهای موجود در شکل ۱، کمیات T_{out} ، h (یا V) و q_{out} متغیرهای خروجی و تاثیرپذیر بوده، در حالیکه کمیات T_a ، T_{in} ، q_{in} و T_{sat} (یا P_{sat}) کمیات ورودی و تاثیرگذار می‌باشند. با توجه به هدف کنترلی، T_{out} را متغیر اصلی خروجی یا کنترل‌شونده در نظر می‌گیریم.

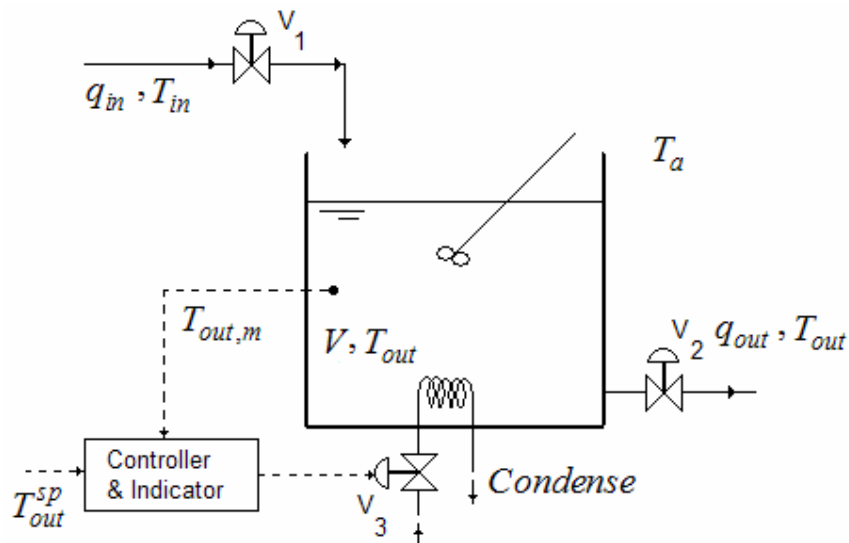
گام دوم - برای مهار متغیر T_{out} ، باید بسته به رویکرد کنترلی، تعداد و نوع اندازه‌گیری‌ها را معلوم کنیم. مکانیسم کنترل چه دستی باشد و چه خودکار و دخالت چه مستقیم یا غیرمستقیم باشد، نیازمند آگاهی از مقدار و چگونگی تغییر کمیات خاصی هستیم. به طور مثال فرض کنید منظور نظرمات کنترول دستی و مستقیم T_{out} باشد، یعنی یک کارگر ساده را آموزش می‌دهیم که با نگاه (مکانیسم اندازه‌گیری) به دماسنج نصب شده در تانک یا لوله خروجی از آن و مشاهده تغییر در T_{out} با استفاده از یک شیر مخلوط، T_{out} را در دمای مقرر (T_{out}^{sp}) نگاه دارد. این رویکرد کنترلی، یک رویکرد اولاً مستقیم است، چون T_{out} را مستقیماً دستکاری می‌کند، ثانیاً فیدبک است، چون با معلول مقابله می‌کند، یعنی کار ندارد که علت تغییر در T_{out} به خاطر تغییر در دمای محیط (T_a) بوده یا تغییر در دمای جریان ورودی (T_{in})، ثالثاً کنترول دستی است، یعنی نحوه مقابله (چرخاندن شیر مخلوط) به صورت خودکار یا محاسبه شده توسط کامپیوتر (کنترلر) نمی‌باشد، بلکه بر اساس تجربه و مهارت اپراتور می‌باشد. حال اگر اندازه‌گیری، به جای T_{out} ، دمای ورودی (T_{in}) می‌بود و بقیه کارها مثل حالت قبل بود، آنگاه این رویکرد و تصمیم طراحی جدید، اولاً مستقیم است، ثانیاً فیدفوروارد است، چون با علت مقابله می‌کند و ثالثاً کنترول دستی است. اگر هم T_{out} و هم T_{in} را اندازه‌گیری کنیم و متناسب با مقادیر اندازه‌گیری شده آنها کار کنیم و سایر کارها مثل دو حالت قبل باشد، آنگاه این رویکرد و طرح جدید، اولاً مستقیم است، ثانیاً فیدبک-فیدفوروارد است، چون هم با معلول (T_{out}) مقابله می‌کند و هم با یکی از علتها (T_{in})، ثالثاً کنترول همچنان دستی است و نه خودکار.

گام سوم - در این مقام باید یک تحلیل مهندسی خرج کنیم تا جفت متغیرهای کنترول‌شونده - کنترول‌کننده معلوم شود. این بدان معناست که با توجه به هدف کنترول (تامین جریان خروجی با دمای T_{out}^{sp} علیرغم حضور اغتشاشات محتمل و مختلف) چه متغیری (کنترول‌شونده) با چه متغیری (کنترول‌کننده) کنترول شود. انتخاب متغیر کنترول‌شونده، بستگی بسیار به مکانیسم سنسور و اندازه‌گیری آن دارد. به طور مثال برای کنترول غلظت محصول مقطره، ممکنست اولین چیزی که به ذهن برسد، استفاده از کروماتوگرافی گاز باشد. یعنی متغیر کنترول‌شونده همانی باشد که اندازه‌گیری می‌شود (برای اهداف مانیتورینگ و کنترول). این رویکرد در صنعت متداول نیست اگر چه در آزمایشگاه‌ها رایج است. علت نیز اینست که یکدستگاه GC در خط (on-line) قریب به 250'000 دلار قیمت دارد و شاید این مقدار هزینه برای فقط مصرف کنترلی، به صرفه اقتصادی نباشد. رویکرد دیگر اینست که استنباطی (inferential) کار کنیم، یعنی متغیر ارزان دیگری (از نظر اندازه‌گیری) را به

جای متغیر اصلی کنترل کنیم. برای مثال در برج تقطیر، معمولاً دمای محصول مقطره (دمای جوش) را اندازه می‌گیرند و سعی می‌کنند آن را کنترل کنند، انگار غلظت را کنترل می‌کنند. در آن صورت به جای GC گران قیمت از یک ترموکوپل یا RTD با قیمتی به مراتب پائین تر (کمتر از یک هزارم قیمت) استفاده کنیم. به هر حال برای مثال حاضر (تانک پیش گرمکن) متغیر کنترل شونده، (T_{out}) همان متغیر اندازه گیری شونده $T_{out,m}$ نیز می‌باشد. برای متغیر کنترل کننده یا تنظیمی (Manipulated Variable) باید از لیست متغیرهای تاثیرگذار یا ورودی، آنی را انتخاب کنیم که از نظر عملی هم تاثیرگذاری نسبتاً بالا داشته باشد و هم هزینه تعمیر و نگهداری و عملیاتی آن پائین باشد. به طور مثال، اگر متغیر کنترل کننده را q_{in} بگیریم، یعنی مساله جفت یابی (pairing) را به صورت $(T_{out} - q_{in})$ در نظر بگیریم آنگاه بقیه ورودی‌ها را به صورت اغتشاشات (غیرقابل اندازه گیری) در نظر گرفته ایم. اگر جفت یابی را به صورت $(T_{out} - q_{sat.})$ بگیریم، یعنی پیشنهاد کرده ایم که T_{out} با $q_{sat.}$ کنترل شود.

گام چهارم- در این مرحله اگر قصد کنترل خودکار داریم، باید حلقه (فرآیند به همراه کنترلر) را ببندیم و دیاگرام PFD را به P&ID تبدیل کنیم. بقیه کار شامل تنظیم پارامترها یا طراحی ساختار کنترلی (الگوریتم) می‌باشد. علت نیز اینست که برای مثلاً طرح $(T_{out} - q_{in})$ ، باید به نحوی محاسبه خودکار q_{in} که به عهده کنترلر است را معلوم و تعیین کنیم، T_{out} هم که توسط سنسور به طور خودکار نمونه گیری یا اندازه گیری می‌شود. لذا، باید این اطلاعات اندازه گیری که به سمت کنترلر می‌رود را در PFD منعکس کنیم (تبدیل به P&ID) یا به اصطلاح مهندسی کنترل، حلقه را ببندیم. شایان ذکر است که یک فرآیند با PFD متعلقه، خیلی با همان فرآیند ولی تحت کنترل (همراه با P&ID متعلقه) تفاوت دارد. اصولاً بار اطلاعاتی و درجه آزادی یک فرآیند تحت کنترل خودکار (P&ID) با فرآیند آزاد طبیعی تفاوت اساسی دارند، به طوری که می‌توان گفت نسبت فرآیند ساده و مدار باز (با نقشه PFD) به همان فرآیند ولی تحت کنترل (با نقشه P&ID) مثل نسبت تخته یا الوار چوب است به یک دست صندلی! آن دست صندلی به ظاهر جمود در خود شعور نچار و طراح، پردازش‌های مختلف نظیر اره کردن، هم‌راستا کردن، چسب چوب، چکش کاری، رنگ و... را در خود جا داده است و به نوعی گواهی حضور آنان یا تجربه خود را می‌دهد.

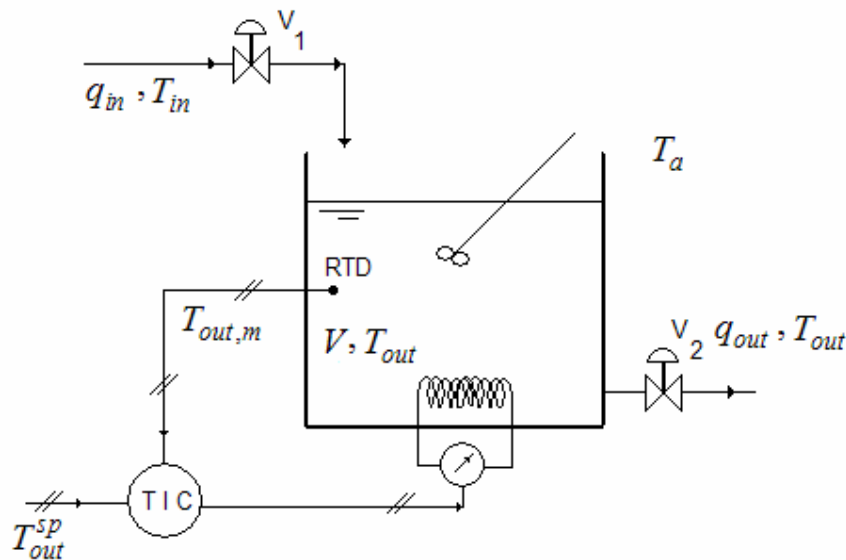
در ادامه به چند ترکیب مدار بسته برای فرآیند مدار باز در شکل ۱ می‌پردازیم.



شکل ۲- ساختار کنترلی SISO پیشنهادی برای آلترناتیو اول.

آلترناتیو اول (شکل ۲)- در این ساختار، فلسفه کنترل فیدبک (مقابل با معلول) را انتخاب کرده‌ایم. جفت متغیرهای کنترل‌شونده- کنترل‌کننده را به صورت $(T_{out} - q_{sat.})$ و متغیر اندازه‌گیری را همان خروجی یا کمیت تاثیرپذیر T_{out} انتخاب کرده‌ایم. اندازه‌گیری توسط سنسور ترموکوپل صورت می‌گیرد. بدین ترتیب، کنترلر باید T_{out} را علیرغم حضور اغتشاشاتی نظیر q_{in} یا T_{in} یا T_a و در ظرف زمان (دینامیکی) و مقدار مقررش یعنی T_{out}^{sp} نگهدارد. به علامت خط چین، بخاطر تمایز بین جریان مواد (خط پر) و جریان اطلاعات (خط چین) توجه کنید.

آلترناتیو دوم (شکل ۳)- در این ساختار، سنسور را از ترموکوپل به RTD که دقیق ترست عوض کرده‌ایم. همچنین مکانیسم دستکاری در متغیر تاثیرگذار را از شیر کنترل (عوض کردن یا دستکاری $q_{sat.}$) به هیتر برقی تغییر داده‌ایم، به عبارتی جفت متغیر کنترل‌شونده- کنترل‌کننده را به صورت $(T_{out} - Q_{heater})$ در نظر گرفتیم. برچسب TIC در شکل به مفهوم Temperature Indicator & Control می‌باشد. این نوع نماد گذاری، مخصوص نقشه‌های P&ID می‌باشد که محض آشنایی خوانندگان با اصطلاحات کنترل صنعتی در شکل درج شده است.

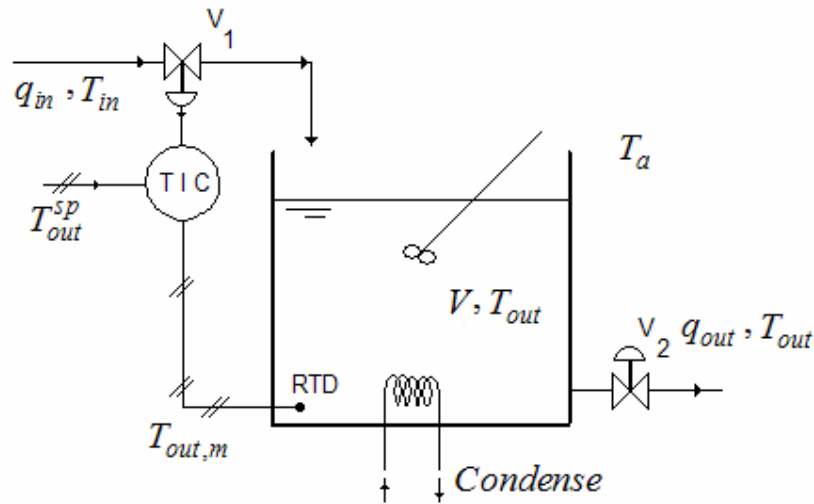


شکل ۳- ساختار کنترلی SISO پیشنهادی برای آلترناتیو دوم.

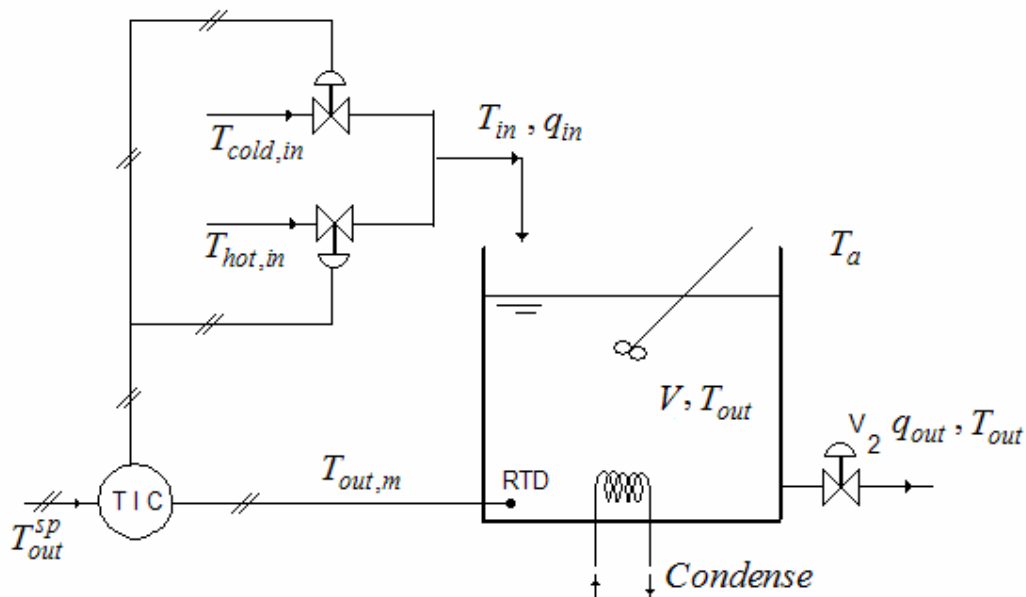
آلترناتیو سوم (شکل ۴)- در این ساختار، متغیر کنترل‌کننده را عوض کرده‌ایم. بدین صورت که جفت متغیرهای $(T_{out} - q_{in})$ ، عمل و بستر کنترلی را فراهم می‌کنند. یک استاندارد دیگر جهت نمایش اطلاعات استفاده از هاشور (علامت #) به جای نقطه چین برای جریان اطلاعات می‌باشد.

آلترناتیو چهارم (شکل ۵)- در این ساختار نیز، نحوه جفت‌سازی (pairing) را به صورت $(T_{out} - T_{in})$ عوض کرده‌ایم. نکته جالب در پیاده‌سازی و نحوه تغییر در T_{in} می‌باشد. سیستمی شبیه شیر اختلاط برای این کار تعبیه شده تا دبی جرمی (q_{in}) ثابت بماند. اگر از دو شیر کنترل روی دو جریان سرد و گرم استفاده کنیم، آنگاه کفایت مود عمل شیرها، عکس یکدیگر باشند، فافهم! یعنی با یک دستور کنترلی، اگر یکی از شیرها باید ۱۰٪ باز شود آنگاه شیر دیگر باید ۱۰٪ بسته شود.

شایان ذکرست حضور کویل بخار اشباع، اختیاریست و وجود یا عدم آن بستگی به استدلال یا خواست مهندس طراح فرآیند دارد.



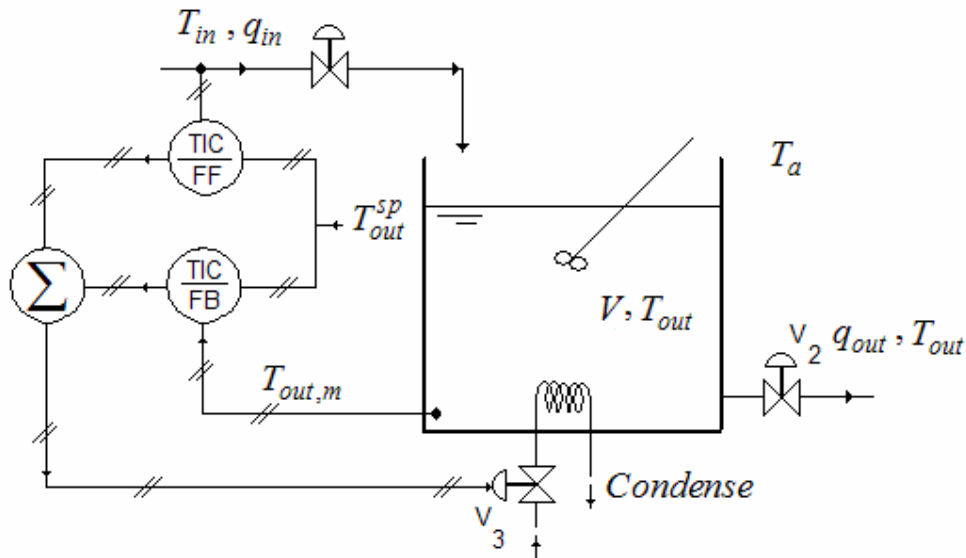
شکل ۴- ساختار کنترلی SISO پیشنهادی برای آلترناتیو سوم.



شکل ۵- ساختار کنترلی SISO پیشنهادی برای آلترناتیو چهارم.

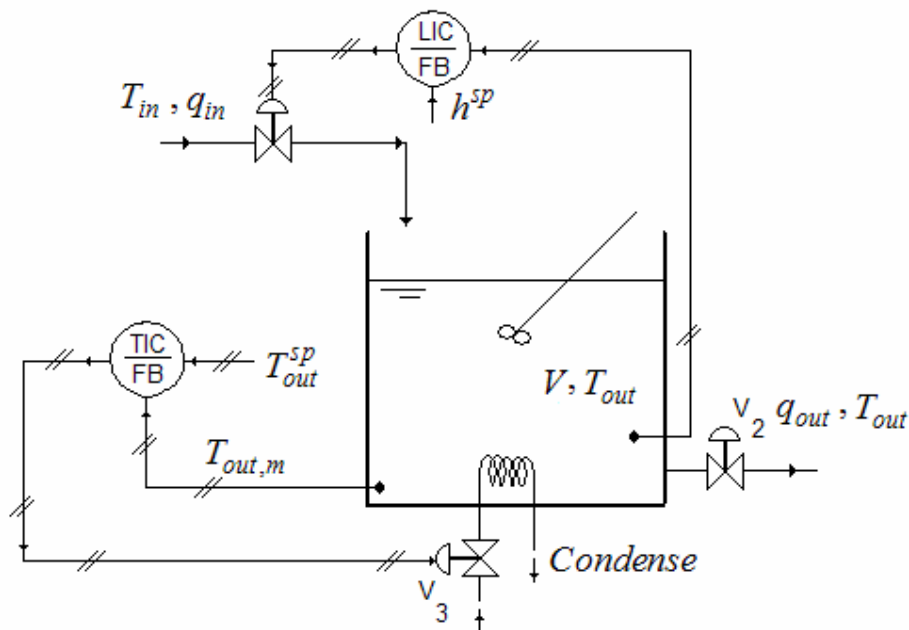
آلترناتیو پنجم (شکل ۶) - در این ساختار از ترکیب فیدبک- فیدفوروارد استفاده کردیم. اضافه کردن حلقه فیدفوروارد (مقابل با علت) بخاطر بهبود عملکرد کنترلر فیدبک (مقابل با معلول) بوده است، چرا که فرض کنید که قبلاً به ما گفته شده که اغتشاش کثیرالوقوع همان T_{in} می باشد. علت آنهم، استفاده از آب لوله کشی بوده است که در طول روز تغییرات دمایی با گستره نسبتاً وسیع دارد. از طرفی کنترلر فیدبک معمولاً بسته به اهداف مختلف و در راستای هدف و محور عملیاتی مورد نظر تنظیم می شود، به طور مثال برای عملکرد عالی در تعقیب مقدار مقرر (T_{out}^{sp}) تنظیم شده یا اینکه برای مقابله با نویز

اندازه‌گیری (یک نوع اغتشاش با ساختار تصادفی) خوب تنظیم شده است. در نتیجه نباید انتظار داشت که کنترلر مزبور برای حذف اغتشاش مثلاً T_a یا q_{in} یا T_{in} نیز بسیار عالی عمل کند. یک آلترناتیو بهبوددهنده، استفاده از حلقه فیدفوروارد می‌باشد. به کنترلر مربوطه می‌گوییم چند ورودی - تک خروجی (MISO) به این خاطر که دو اندازه‌گیری به کنترلر وارد می‌شود، ولی یک متغیر کنترل‌کننده را محاسبه می‌کند و از کنترلر خارج می‌شود (یا به فرآیند وارد می‌شود). یک عیب فیدفوروارد در کنار حسن آن، استفاده از اندازه‌گیری به ازای هر اغتشاش که بخواهیم فیدفوروارد کنیم می‌باشد.



شکل ۶- ساختار کنترلی MISO به صورت ترکیب فیدبک - فیدفوروارد برای آلترناتیو پنجم.

آلترناتیو ششم - در این ساختار، انگار هدف کنترلی، کنترل دو کمیت بوده است، یعنی هم T_{out} باید کنترل شود و هم کنترل ارتفاع یا q_{out} . بر چسب LIC نیز به مفهوم Level Indicator & Control می‌باشد. دقت شود، می‌توان به جای نصب یک حلقه کنترلی برای کنترل q_{out} طراحی فرآیند را عوض کرد و به جای تخلیه سیال توسط هد یا ارتفاع سیال از پمپ استفاده کرد ولی در صورت استفاده از پمپ، فرآیند دارای مود انتگرال‌گیر (خازنی محض) می‌شود که یک نوع فرآیند ناپایدار است و کنترل و تنظیم کنترلر آن مشکلات و سختی‌های خود را دارد، به همین خاطر مهندسین فرآیند باید قدر فرشتگان کنترلی را بدانند که بدون ایجاد هزینه نصب پمپ و فقط با اضافه کردن یک حلقه کنترلی و تعویض شیردستی با شیر کنترل، انعطاف‌پذیری و کنترل‌پذیری فرآیند را تضمین می‌کنند. شایان ذکر است که در نگاه میکروسکوپی، دو حلقه تک ورودی - تک خروجی با جفت‌های $(T_{out} - q_{sat.})$ و $(h - q_{in})$ داریم ولی در نگاه ماکروسکوپی و کلان، یک مکانیسم چند ورودی - چند خروجی (دو اندازه‌گیری - دو متغیر کنترل‌کننده) داریم!



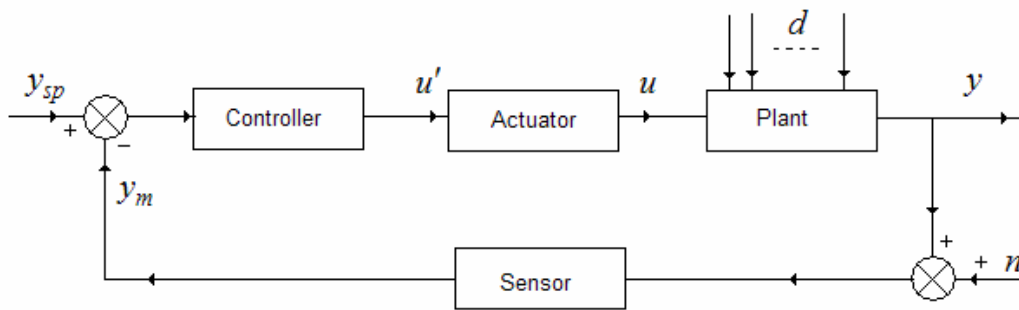
شکل ۷- ساختار کنترلی، دو حلقه SISO یا یک حلقه MISO برای آلترناتیو ششم.

نمایش بلوک دیاگرام

همانطور که قبلاً نیز گفته شد عبارات و الفاظ فنی، تشکیل دهنده مستندات مدیریتی و حقوقی بوده و نقشه های P&ID و PFD نیز برای تعامل و گفت‌وگو بین مهندسين طراح و کنترلی با اپراتورها و تکنسین‌ها به کار می‌رود. نمایش بلوک دیاگرام نیز برای انتقال ایده‌ها و مفاهیم کنترلی محض بین جمع متخصصین و دست‌اندرکار اتوماسیون و کنترل به کار می‌رود. در شکل ۸، یک بلوک دیاگرام نمونه برای کنترل فیدبک (منفی) SISO رسم شده است. مبادی و مولفه های اصلی یک بلوک دیاگرام شامل سیگنال‌ها و مفردات (بلوک‌های) دینامیکی می‌باشد.

لیست سیگنال‌های اصلی و متغیر با زمان عبارتند از:

- ۱- خروجی فرآیند که با y یا y_m نمایش داده می‌شود. دقت شود همین متغیر در حالت مدار بسته (حضور کنترلر) یکی از ورودی‌های کنترلر می‌باشد. این متغیر برای مثال تانک پیش‌گرمکن، همان T_{out} می‌باشد.
- ۲- متغیر کنترل‌کننده که با u' یا u نمایش داده می‌شود. این متغیر با شأن ریاضی خود به عنوان ورودی به فرآیند تلقی شده ولی در عین حال برای مدار بسته، خروجی از کنترلر محسوب می‌شود. این سیگنال برای مثال تانک پیش‌گرمکن، همان q_{sat} (آلترناتیو اول)، Q_{heater} (آلترناتیو دوم) q_{in} (آلترناتیو سوم) و T_{in} (آلترناتیو چهارم) می‌باشد.
- ۳- متغیرهای اغتشاش که با d_i یا n نمایش داده می‌شوند. این متغیرها با شأن ریاضی خود به عنوان ورودی به فرآیند تلقی شده و در عین حال برای کل مدار بسته نیز، به عنوان ورودی حساب می‌شوند. اگر این اغتشاشات نیز اندازه‌گیری شوند، عملاً در حلقه های دیگری غیر از حلقه اصلی فیدبک استفاده می‌شوند. این سیگنال‌ها برای مثال تانک پیش‌گرمکن (آلترناتیو اول) شامل ورودی‌هایی نظیر T_{in} ، q_{in} و T_a می‌باشند.



شکل ۸- یک بلوک دیاگرام نمونه بیانگر فیدبک منفی.

۴- سیگنال مقدار مقرر- این سیگنال معمولاً ورودی به مدار بسته یا بخشی از ورودی‌های کنترلر می‌باشد (بخش دیگر، سیگنال اندازه‌گیری می‌باشد). مقدار مقرر معمولاً توسط کاربر (اپراتور) توسط دگمه‌های روی کنترلر وارد می‌شود و بر خلاف اغتشاشات نظیر نویز اندازه‌گیری یا ارتعاش شیر کنترل، ماهیت معین و محدود (deterministic) دارد. این سیگنال برای مدار باز یا فرآیند وحشی (یعنی کنترل روی آن نباشد) موضوعیت ندارد.

۵- سیگنال خطای فیدبک- این سیگنال از دیدگاه کلی مدار بسته یک سیگنال میانی محسوب شده و عملاً درون کنترلر محاسبه یا متولد می‌شود. این سیگنال برای وقتی که کنترلر در مود دستی باشد، همان y_{sp} است (چون y_m مساوی صفر است) و در حالتی که y_{sp} تغییر نکند، همان y_m است؛ با مقدار منفی (چون در این حالت y_{sp} صفر است).

لیست بلوک‌های دینامیکی اصلی عبارتند از:

۱- فرآیند- این بلوک ذاتی و اصیل بوده و نمی‌توان به طور مستقیم دینامیک ذاتی آن را عوض کرد، مگر اینکه اجزای داخلی آن را عوض کنیم، مثلاً شیر V3 را عوض کنیم یا به جای کویل بخار، از هیتر برقی استفاده کنیم یا حجم آن را دو برابر کنیم! به هر حال قصد ما در کنترل فرآیندها، عوض کردن سایز و هندسه ظروف نیست یا در سخت‌افزار فرآیند تغییر و تبدل انجام دهیم، بلکه می‌خواهیم بطور نرم افزاری (با نصب کنترلر) آن را مهار یا کنترل کنیم به طوری که آن دینامیکی که مطلوب ماست از خود بروز دهد.

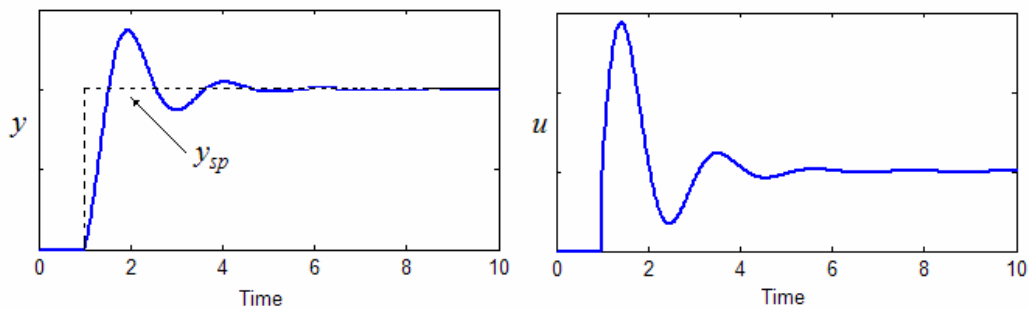
۲- عنصر اندازه‌گیر و یا سنسور- این عنصر سخت‌افزاری نیز، مثل فرآیند یک دستگاه دینامیکی است ولی در صنایع فرآیندی، دارای ثابت زمانی غالب بسیار کوچکتر از فرآیند است، یعنی دارای دینامیک سریع می‌باشد. معمولاً در حلقه‌های فیدبک، آن را با یک ثابت جبری (تناسبی محض) نشان می‌دهند.

۳- عنصر کنترل نهایی (شیر کنترل)- این عنصر سخت‌افزاری نیز مثل سنسور معمولاً دارای دینامیک سریع است و با تقریب مهندسی آن را با یک ثابت جبری (K_V) نشان می‌دهند.

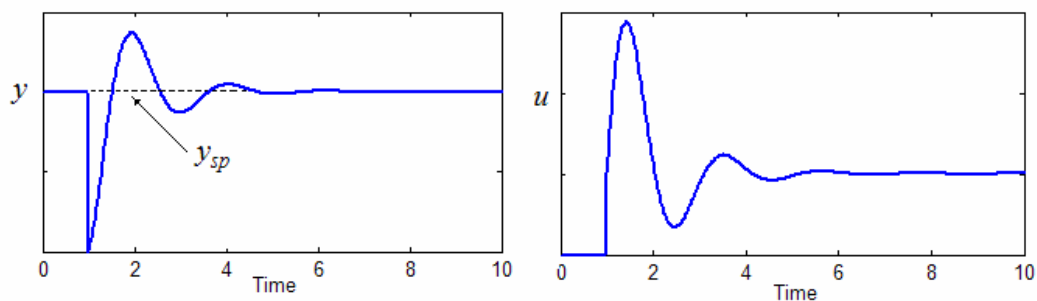
۴- کنترلر- اگر ماشین حساب یا کامپیوتر سخت‌افزار محسوب شود این ماجول هم سخت‌افزاریست؛ اگر وجوب وجود آن و رسالت آن، نرم‌افزاری و محاسباتی است، باید جزء ماجول نرم‌افزاری حساب کرده و وظیفه محاسباتی آن را مثل یک ماشین عملیات محاسباتی، محاسبه u یا u' از روی اطلاعات اندازه‌گیری (y یا y_m) و مقدار مقرر (y_{sp}) داده شده توسط کاربر نهایی (اپراتور) بدانیم. حضور کنترلر برای مساله کنترل به دو علت می‌باشد: یکی مساله تعقیب مقدار مقرر می‌باشد و دیگری مساله رگولاسیون. مساله تعقیب مقدار (setpoint)

(tracking) که دارای مترادف های مکانیزم سروو (servo Mechanism) و تعقیب دستور (command following) می باشد به اینصورت است که کنترلر باید u یا u' را طوری محاسبه کند که y یا y_m مثلاً در اسرع وقت بدون خطای ماندگار به y_{sp} برسد. این نوع کنترل برای فرآیندهای پیوسته در مواقع راه اندازی (startup) یا تعطیلی (shut down) و برای فرآیندهای ناپیوسته (batch) بسیار رایج است. مورد دیگر کنترل رگولاسیون بوده و دارای اسامی مترادف حذف بار (load rejection) یا جبران سازی و مقابله با اغتشاش (Disturbance Compensation) می باشد. در این حالت، وظیفه کنترلر محاسبه u و u' و اعمال به فرآیند می باشد، بطوریکه خروجی (y یا y_m) در مقدار مقرر خودش (y_{sp}) باقی بماند.

در شکل ۹ نمودارهای زمانی نمونه جفت متغیرهای کنترل کننده و کنترل شونده بطور نمونه و در حالت (مدار بسته) تعقیب مقدار مقرر آمده است. در شکل ۱۰ نیز همین نمودارها برای حالت (مدار بسته) رگولاسیون آمده است.



شکل ۹- پاسخ مدار بسته برای حالت و مکانیزم سروو.



شکل ۱۰- پاسخ مدار بسته برای حالت و مکانیزم رگولاسیون.

مقدمه

هسته و منظور اصلی درس کنترل فرآیندها، مبتنی بر تئوری کنترل خطی می‌باشد، ولی پرداختن به مطالب و مباحث تئوریک محض، بدون در نظر گرفتن نکات عملی و ابزار عملی کنترل، موسوم به ابزار دقیق، منجر به یک مسئله منقوض و شیربی‌بال و دم و اشکم خواهد شد. البته قابل ذکر است که در این بخش به بهانه طرح مطالب ابزار دقیق، وارد جزئیات آن نخواهیم شد و خواننده علاقه مند را به مراجعه دو رفرنس زیر ترغیب می‌کنیم:

1. Instrument Engineers' Handbook, by B. G. Liptak, ehilto, Radnor, PA, 1970
2. Measurement Fundamentals, by Moore, ISA Publication, Res. Triangle park, NC, 1989

بدین ترتیب وارد نکات دقیق هیدرولیکی، مکانیکی و کامپیوتری نمی‌شویم، چون محصولات نهایی ابزار دقیق از یک سازنده به سازنده دیگر فرق می‌کند و در اینجا فقط به مباحث و ارکان اساسی ابزار دقیق می‌پردازیم. باید به این نکته توجه داشت که تکنولوژی ساخت و به کارگیری ابزار دقیق طی دهه‌های اخیر مشمول یک انقلاب الکترونیکی (و نه تکامل) شده است، به طوریکه مجموعه سخت‌افزاری سیستم‌های اتوماسیون و کنترل را می‌توان به پنج دوره یا نسل تقسیم کرد. هر کدام از این دوره‌ها، شامل انقلاب تکنولوژیک در برخی از مفردات آن می‌باشد:

۱- نسل اول (مکانیکی): تمامی سنسورها، شیرکنترلها و حتی کنترلرها تماماً برخوردار از تکنولوژی هیدرولیکی، نیوماتیکی و مکانیکی بوده‌اند.

۲- نسل دوم (الکترومکانیکی): برخی از سنسورها و حتی ماژولهای الکترونیکی (مثل رله) مجهز به تجهیزات الکترومکانیکی شده‌اند.

۳- نسل سوم (الکترونیکی): تقریباً تمام ابزار، حتی شیرکنترل نیز الکتریکی شده‌اند، کنترل‌های فیلد نیز به صورت میکروکنترلر و دیجیتال به کار گرفته شده‌اند.

۴- نسل چهارم (کنترل کامپیوتری): فلسفه مدیریت کنترل فرایند بطوری ظاهر شد که سنسورها و شیرکنترلها از نظر جغرافیایی در فیلد توزیع شدند ولی الگوریتم کنترل به صورت گروهی و به شکل برنامه‌های کامپیوتری در ایستگاه‌های کاری (workstation) اجرا می‌شوند. به این سیستم، کنترل مرکزی (Centralized Control) به وجه کنترلر (و کامپیوتر اصلی) و سیستم کنترل توزیع شده (Distributed Control System – DCS) به وجه توزیع جغرافیایی ابزار دقیق، اطلاق می‌شود.

۵- نسل پنجم (فیلد باس): جهت استقلال سیستم‌های DCS از نوع سیگنالها و حتی از مدل‌های خاص سازندگان تجهیزات و همچنین استفاده از فناوری گسترده تکنولوژی اطلاعات (IT) و شبکه کامپیوتری، سیستم کامپیوتری DCS به صورت استاندارد شده (پروتکل‌های متداول شبکه) پیاده‌سازی شدند. لذا، درست شبیه معماری باس (Bus) در ساختارهای سخت‌افزاری کامپیوتری نظیر گذرگاه داده‌ها (Data Bus) یا گذرگاه آدرس (Address Bus)، این نوع گذرگاه که محل عبور اطلاعات تنظیمی کنترل‌کننده‌ها و حتی اطلاعات و رکوردهای اندازه‌گیری هستند موسوم به فیلد باس (Field Bus) یا گذرگاه داده‌های فرآیند (Process Bus) شدند.

سنسورها

قلب ابزار دقیق، تجهیزات اندازه‌گیری یا سنسورهای در خط (online) می‌باشند. مهم‌ترین کمّیاتی که در مهندسی شیمی اندازه‌گیری می‌شوند، عناصر اربعه یک فرآیند یعنی شدت جریان (دبی)، دما، فشار و سطح می‌باشند. دستگاه‌های

اندازه‌گیری سایر کمیات نظیر pH، دانسیته، ویسکوزیته، جذب مادون قرمز و ماورای بنفش نیز موجودند و کاربردهای خاص خود را دارند.

سنسور دبی - اریفیس متر یکی از ارزان‌ترین و متداول‌ترین سنسور دبی می‌باشد. مکانیسم کار بدین صورت است که اختلاف فشار مابین دو طرف اریفیس با مربع دبی یک رابطه جبری دارد. در نتیجه اگر سیگنال اختلاف فشار را بدانیم، آنگاه می‌تون به طور غیر مستقیم دبی را عملاً اندازه‌گیری کرد. به طور عمومی، اریفیس‌ها طوری ساخته می‌شوند که در گستره ۲۰ تا ۲۰۰ اینچ آب، اختلاف فشار ایجاد کنند. یک مکانیسم دیگر استفاده از توربین متر می‌باشد. برای استفاده از این دستگاه‌ها باید مصالحه‌ای بین قیمت آن (گرانتر از اریفیس هستند) و نیاز به دقت بالای اندازه‌گیری برقرار کرد.

سایر دستگاه‌های فلومتر، شامل سنجش سرعت صوت (فلومترهای صوتی)، فلومتر مغناطیسی، روتامتر، لوله پیتوت و فلومترهای گردابی (Vortex Shedding) می‌باشند. در سیستم‌های جریان برگشتی گاز، افت فشار زیاد تولید شده بخاطر فلومتر منجر به انرژی مصرفی کمپرسور می‌شود، لذا برای این سیستم‌ها از فلومترهای دیگری با افت فشار کم، مثل لوله پیتوت و فلومتر گردابی استفاده می‌شود. به خاطر ماهیت توربولانس جریان، سیگنال و اندازه‌گیری دبی شدیداً آلوده به نویز خواهد بود، لذا باید قبل از ارسال به کنترلر فیلتر (یکنواخت) شود. امروزه اکثر سنسورهای دبی مجهز به فیلتر هستند و حتی در صورت عدم برخورداری، کنترلرها عمل فیلترینگ را به عهده می‌گیرند.

سنسور دما - ترموکوپل‌ها متداول‌ترین سنسور دما می‌باشند و نوعاً در یک غلاف (Thermowell) که در ظرف یا لوله از قبل نصب شده قرار داده می‌شوند. مکانیسم کار نیز مبتنی بر پدیده تولید پتانسیل الکتریکی (در حد میلی‌ولت) توسط دو فلز غیر همجنس که در دو سر تماس غیر همدمای آنها به هم متصلند می‌باشد. نوع آهن-تنگستن از رایج‌ترین ترموکوپل‌هاست که در گستره دمایی 0-1300 °F کار می‌کنند.

لوله‌های پر شده (Filled Bulb) نیز متداولند. در این سیستم‌ها گاز در یک لوله یا حباب با حجم محدود قرار دارد و فشار آن اندازه‌گیری می‌شود. با افزایش یا کاهش دما، بر میزان فشار سیستم افزوده شده یا کاسته می‌شود. ترمومترهای مبتنی بر مقاوم اهمیک (Resistant Thermometer Diode - RTD) گرچه گرانتر ولی دقیق‌تر هستند. مکانیسم عملکرد آنها مبتنی بر رابطه بین دما و مقاومت اهمیک می‌باشد. پاسخ دینامیکی سنسورها نوعاً خیلی سریع است ولی سنسورهای دما استثناً هستند. ثابت زمانی یک ترموکوپل با غلاف عمیق و پوشش پلیمری (عایق) ضد خوردگی در حدود چند دقیقه می‌باشد!

سنسور فشار و اختلاف فشار - از مکانیزم‌های معروف اندازه‌گیری فشار و اختلاف فشار در سیستم‌های فرایندی سه مکانیسم (۱) لوله‌های ماریچ (Bourden Tube) (۲) سیستم‌های آکاردئونی (Bellows) و (۳) دیافراگم می‌باشند. در سیستم‌های مکانیکی (اعمال نیرو)، معمولاً از سیستم اندازه‌گیری موقعیت فنر یا میزان فشرده شدن آن استفاده می‌شود.

سنسورهای ارتفاع یا سطح مایع - ارتفاع مایعات به طرق مختلف و به صورت مستقیم یا غیرمستقیم اندازه‌گیری می‌شود، ولی رایج‌ترین مکانیسم‌ها سه قسم می‌باشند:

۱- تعقیب موقعیت یک شناور که سبکتر از سیال مخزن باشد.

۲- اندازه‌گیری وزن ظاهری یک استوانه شناور (معروف به اندازه‌گیرهای جابجایی)

۳- اندازه‌گیری اختلاف فشار استاتیکی بین دو نقطه از مخزن

ترانسمیترها (Transmitters) - ترانسمیترها نوعاً واحدهای الکترومکانیکی (یا کاملاً الکترونیکی) پردازش سیگنال هستند، بدین معنی که به صورت واسط بین فرآیند و سیستم کنترل عمل می کنند. مدار الکتریکی یا مجموعه الکترومکانیکی یک ترانسمیتر غالباً در خود سنسور یا همراه با آن قرار دارد. اگر آن را جدا حساب کنیم، آنگاه موسوم به ترانسدیوسر (Transducer) است. یک ترانسمیتر نمونه، سیگنال اندازه گیری را که معمولاً به صورت میلی ولت، اختلاف فشار و یا جابجایی مکانیکی هستند را به یک سیگنال استاندارد تبدیل می کنند. منظور از سیگنال کنترلی، سیگنال های ورودی به کنترلر و خروجی از آن است. سیگنال های استاندارد کنترلی که سازندگان بین المللی بر سر آنها توافق دارند عبارتند از:

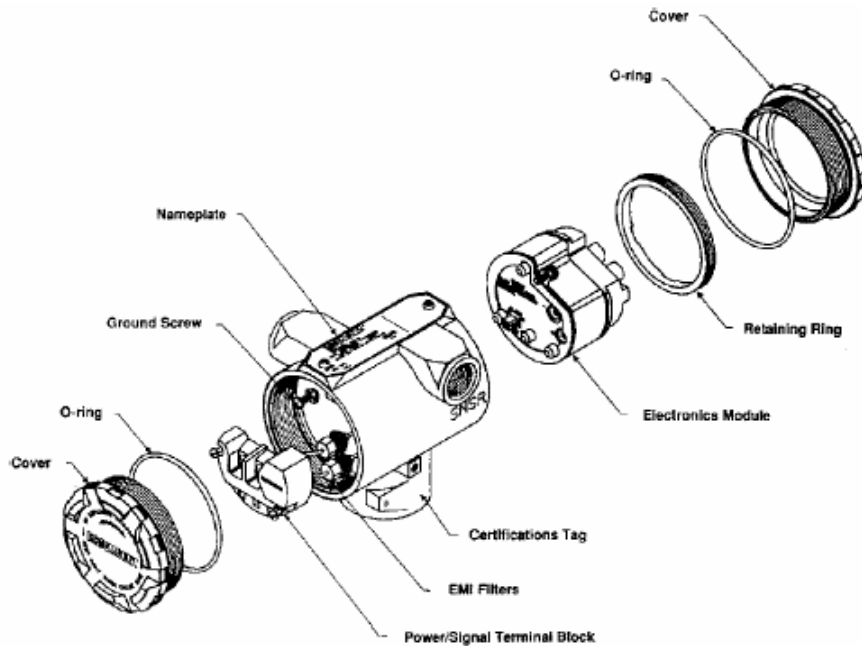
ولت: $0-1, 0-10, \pm 10, \pm 5$

آمپر: 4-20 mA

فشار: 3-15 psig

به طور نمونه، به ترانسمیتر فشار نشان داده شده در شکل ۱ مراجعه کنید. فرض کنید این ترانسمیتر طوری طراحی شده است که فشار نسبی بین ۱۰۰ تا ۱۰۰۰ کیلو پاسکال را تبدیل به جریان استاندارد ۴ تا ۲۰ میلی آمپر می کند و به اصطلاحات زیر توجه کنید.

گستره اندازه گیری (range) این ترانسمیتر (- سنسور)، معادل 100-1000 کیلو پاسکال است. دامنه (span) آن ۹۰۰ و صفر (zero) آن برابر با ۱۰۰ کیلو پاسکال می باشد.



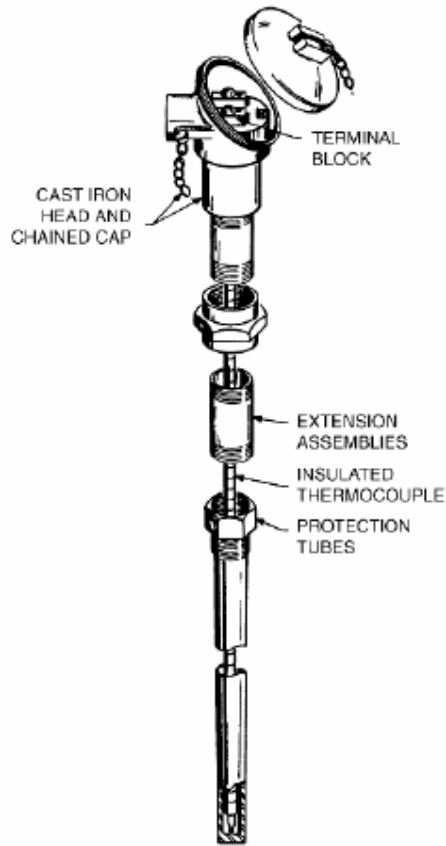
شکل ۱ - یک ترانسمیتر نمونه فشار.

پاسخ دینامیکی خود ترانسمیتر (غیر از سنسور) معمولاً بسیار سریع است و در نتیجه برای آن در بلوک دیاگرام از یک بهره تناسبی ساده استفاده می شود، یعنی به خاطر دینامیک سریع آن، سیستم ترانسمیتر را جبری فرض می کنند. بهره ترانسمیتر مثال جاری معادل $\frac{16}{900}$ با واحد $\frac{mA}{kPa}$ می باشد:

$$K_{trans.} = \frac{20-4}{1000-100} \left(\frac{mA}{kPa} \right) = \frac{16}{900}$$

در شکل ۲، به طور نمونه یک سنسور دما (با ترانسمیتر شکل ۱) نشان داده شده است و طوری (صفر و دامنه آن) تنظیم شده است که اگر دمای فرایند از ۵۰ تا ۲۵۰ درجه فارنهایت تغییر کند، آنگاه خروجی ترانسمیتر از ۴ تا ۲۰ میلی آمپر تغییر می کند. بدین ترتیب گستره نهایی عملکرد $50-250^{\circ}F$ و دامنه آن $200^{\circ}F$ و صفر آن $50^{\circ}F$ است. بهره آن نیز به شکل زیر محاسبه می شود:

$$K_{trans} = \frac{20-4}{1000-100} \left(\frac{mA}{kPa} \right) = \frac{16}{900}$$

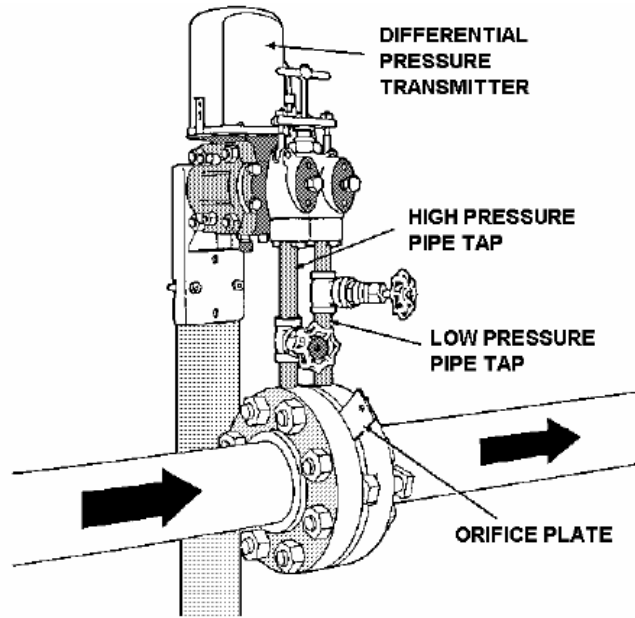


شکل ۲- یک سنسور دمای نمونه (ترموکوپل).

همانطور که قبلاً گفته شد سنسورهای دما دارای پاسخ کند هستند و لذا هنگام درج تابع انتقال سنسور باید دینامیک سنسور دما را نیز لحاظ کرد:

$$G_m(s) = \frac{K_{trans}}{\tau_m s + 1}$$

در شکل ۳ طرح شماتیک یک ترانسمیتر اختلاف فشار ΔP همراه با مکانیسم اریفیس جهت اندازه گیری دبی آمده است. قرار است اختلاف فشار دو طرف اریفیس متر به سیگنال کنترلی تبدیل می شود. فرض کنید اریفیس طوری سایز شده که اختلاف فشار ۱۰۰ اینچ آب را برای فلوی $2000 \frac{kg}{hr}$ بدهد. ترانسمیتر ΔP اینچ آب را به میلی آمپر (سیگنال کنترلی) با بهره $16 \frac{mA}{100 \text{ in water}}$ تبدیل می کند. به هر حال، اندازه گیری جریان برای ما مهم است.



شکل ۳- یک ترانسمیتر نمونه همراه با سنسور اختلاف فشار جهت اندازه گیری شدت جریان.

از آنجایی که ΔP متناسب با مربع (مجذور) دبی می‌باشد، باید یک رابطه غیر خطی بین ΔP و دبی وجود داشته باشد:

$$PV = 4 + 16 \left(\frac{F}{2000} \right)^2$$

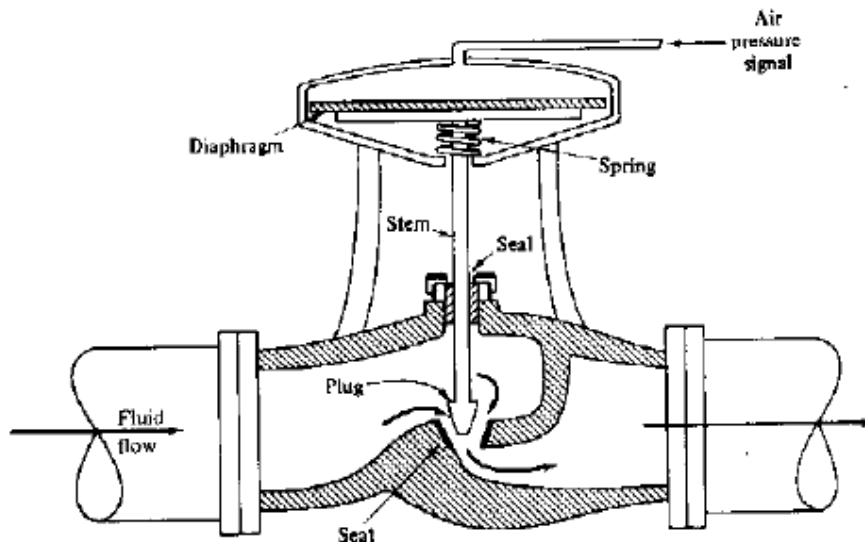
به طوریکه PV ، سیگنال خروجی ترانسمیتر بر حسب mA و F ، مقدار دبی بر حسب kg/hr می‌باشد. برای تحلیل سیستم و به کارگیری این روابط معمولاً رابطه غیر خطی بالا را خطی می‌کنند:

$$PV = \frac{32 F_{ss}}{(F_{max})^2} F$$

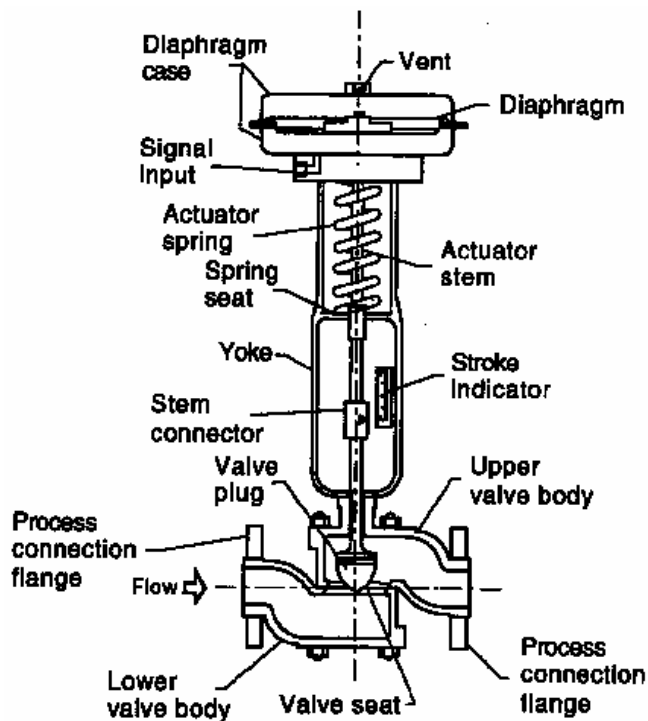
به طوریکه F_{ss} ، میزان جریان در حالت یکنواخت یا شرایط عملیاتی بوده و F_{max} ماگزیمم دبی عبوری می‌باشد. (در این مثال $2000 \frac{kg}{hr}$ می‌باشد).

شیرهای کنترل

اگر کنترلر و الگوریتم‌های کنترل را یک طرف اصلی و نرم‌افزاری حلقه کنترل تجسم کنیم، آن‌گاه شیرهای کنترل عملاً واسط و ذات‌البین این تکه با سر دیگر حلقه، یعنی فرآیند و بخش سخت‌افزاری سیستم مداربسته می‌باشد. اکثر شیرهای کنترل شامل یک توپی (plug) در یک سر ساقه شیر (stem) و یک بالشتک (seat) در سر دیگر ساقه جهت باز و بسته کردن یک دریچه اریفیس مانند هستند (شکل ۴ و ۵). سر دیگر ساقه به یک دیافراگم آب‌بندی شده متصل است. به طوری که با افزایش یا کاهش فشار هوای یوتیلیتی بالاسر دیافراگم، و همچنین به کمک مکانیسم فنر روی ساقه، عملاً ساقه شیر بالا یا پایین می‌رود تا از طریق دریچه کدایی، جریان سیال کم و یا زیاد شود. جنبه‌های اصلی یک شیر کنترل که باید مورد مذاقه طراح (اعم از مهندس فرآیند یا کنترل) قرار بگیرد، عبارتند از عمل شیر (action)، مشخصه‌های عملکردی شیر (characteristics) و اندازه یا سایز شیر کنترل (size).



شکل ۴- دیاگرام شماتیک یک شیر کنترل.



شکل ۵- دیاگرام شماتیک یک شیر کنترل با جزئیات مکانیکی بیشتر.

عمل شیر کنترل - شیرهای کنترل (اعم از برقی و تیوماتیک) از نظر نحوه عمل هنگام وقوع حالات اضطراری دو گونه طراحی می‌شوند. به بیان واضح‌تر، اگر سیستم برق فرآیند قطع شد، شیرهای برقی آیا باید کاملاً باز شوند یا بسته؟ این مود عملکرد بستگی به شرایط فرآیند و تاثیر متغیر کنترل‌کننده روی پروسه دارد. به طور مثال، اگر در شیر کنترل، بخار زنده یا سوخت جریان دارد، باید شیری را انتخاب کنیم که در صورت اضطرار، بسته شود. مثال دیگر، شیر کنترل روی خط جریان مبرد ژاکت سردکن یک راکتور گرمازا می‌باشد. باید آن مود عملیاتی را انتخاب کنیم که اگر جریان هوای فشرده

(یوتیلیتی) روی سر دیافراگم شیر کنترل قطع شد، شیر کاملاً باز شود. شیرهای کنترل نشان داده شده در شکل های ۴ و ۵ کاملاً می‌بندند، اگر ساقه شیر کاملاً پایین بیاید و برعکس، کاملاً باز می‌شوند اگر ساقه آنها کاملاً بالا باشد. از آنجایی که افزایش فشار هوای فشرده بالای سر دیافراگم باعث پایین آمدن ساقه و در نتیجه (برای این شیرهای خاص) بسته شدن شیر یا قطع شدن جریان می‌شود، مود عملکرد آن شیر، «هوا برای بسته شدن» (Air-to-close, AC) می‌باشد. حال اگر بالشتک را برعکس نصب کنیم (البته مقتضی و متناسب با شکل اریفیس) یا فنر را زیر دیافراگم نصب کنیم، آن‌گاه، عملکرد شیر به صورت «هوا برای باز شدن» (Air-to-open, AO) می‌باشد، به طوری که در حالت اضطراری شیر کاملاً بسته می‌ماند. بدین ترتیب، برای مثال اول (جریان بخار یا سوخت)، باید شیر کنترل با مود AO و برای مثال دوم (جریان مبرد)، شیر کنترل با مود AC انتخاب کنیم.

سایز شیر کنترل – سایزینگ یا انتخاب اندازه شیر معمولی (دستی) و شیرهای کنترل از مباحث جدلی و سخت در کنترل فرآیندها و به ویژه در شرکتهای مشاور طراحی فرآیند می‌باشد. نرخ جریان (دبی) عبوری از شیر (کنترل) بستگی به سایز شیر، اُفت فشار دو طرف آن، محل ساقه و خواص سیال دارد. معادله طراحی متداول برای نرخ جریان (سیال تک‌فاز) به صورت زیر می‌باشد:

$$F = C_v f(x) \sqrt{\frac{\Delta P_v}{\gamma}}$$

به طوری که:

F : نرخ شدت جریان عبوری (معمولاً بر حسب gpm)

C_v : ضریب تخلیه یا ضریب سایز شیر

x : محل یا موقعیت ساقه شیر (بر حسب کسری از حالت کاملاً باز)

$f(x)$: کسر سطح کل جریان از شیر که تابعی از موقعیت ساقه یا بالشتک می‌باشد. این تابعیت (یا منحنی بر حسب)

موسوم به «مشخصه ذاتی» شیر می‌باشد که بعداً بحث خواهد شد.

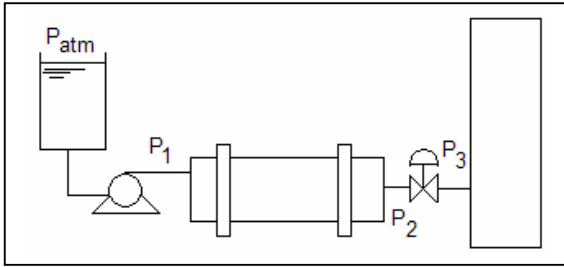
γ : چگالی ویژه (معمولاً نسبت به آب)

ΔP_v : افت فشار ایجاد شده به خاطر مقاومت شیر (معمولاً بر حسب psi)

جزئیات بیشتر شیرها همراه با طراحی مکانیکی و مشخصه‌های آنها بر حسب انواع سیال عبوری را می‌توان در هندبوک‌های مربوطه و یا کاتالوگ‌های سازندگان شیر پیدا کرد. یک رفرنس بسیار معتبر و رایج (در شرکتهای مشاور) کتاب زیر می‌باشد:

Masonielan Handbook for Control Valve Sizing, Dresser Industries, 6th Ed., 1977.

سایز کردن شیرهای کنترل مثال و مورد بسیار خوب مواجهه با پارادوکس‌های عملی در دیسیپلین‌های مهندسی مکانیک و مهندسی شیمی (فرآیند و کنترل) می‌باشد. برای روشن تر شدن موضوع و نحوه مصالحه در انتخاب و سایز کردن شیر کنترل به مثال‌های متعاقب توجه کنید.



مثال: بخشی از یک واحد فرایندی به شکل روبه‌رو را در نظر بگیرید:

- دبی در شرایط (یکنواخت): 100 gpm
- فشار تانک خوراک: اتمسفریک
- افت فشار مبدل ΔP_H : 40 psi در شرایط طراحی
- فشار تانک دریافت کننده: 150 psi
- چگالی سیال (γ): ۱

مهندس پروسه موظف است هم پمپ سانتریفوژ و هم شیر کنترل را size کند. برای این کار دو case در نظر می‌گیریم:

Case 1: (مهندس فرآیند بدون ملاحظه کنترل) هر چه شیر کنترل بزرگتر باشد، افت فشار در آن کمتر است، لذا هد (head) فشار پمپ برای جبران افت فشار کم می‌شود (یعنی انرژی کمتر مصرف می‌شود).

Case 2: (مهندس کنترل، ملاحظه کنترل پذیری) هر چه افت فشار در شیر کنترل بیشتر باشد بهتر است چون گستره عملیاتی (Rangeability) آن پهن تر می‌شود.

Case 1: (وقتی شیر ۵۰٪ باز است) افت فشار شیر کنترل = 20

در شرایط طراحی :
$$\underbrace{150}_{Reservoir} + \underbrace{20}_{Valve} + \underbrace{40}_{H.Exchanger} = 210 \text{ psi}$$

Case 2: (وقتی شیر ۵۰٪ باز است) افت فشار شیر کنترل = 80

در شرایط طراحی :
$$\underbrace{150}_{Reservoir} + \underbrace{80}_{Valve} + \underbrace{40}_{H.Exchanger} = 270 \text{ psi}$$

با استفاده از معادله طراحی شیر کنترل، آن را سایز می‌کنیم:

$$F = C_v f(x) \sqrt{\frac{\Delta P_v}{\gamma}}$$

Case 1:
$$100 = C_v \times \underbrace{0.50}_{(\%50 \text{ open})} \times \sqrt{\frac{20}{1}} \Rightarrow C_{v,1} = 44.72$$

Case 2:
$$100 = C_v \times \underbrace{0.50}_{(\%50 \text{ open})} \times \sqrt{\frac{80}{1}} \Rightarrow C_{v,2} = 22.36$$

لذا شیر کنترل case 2 از، کوچکتر از case 1 می‌باشد.

حالت $f(x) = 1.0$: حال بینیم اگر شیر را تمام باز کنیم مقدار F_{max} چقدر می‌شود؛ هر F_{max} بیشتر شود، دستمان برای کنترل بازتر است. چون منطقه وسیعی از عمل را می‌پوشاند. از طرفی هر چه F بزرگتر باشد، افت فشار در مبدل بیشتر می‌شود، آن هم به طور مربعی:

$$\frac{(\Delta P_H)_{max}}{(\Delta P_H)_{design}} = \left(\frac{F_{max}}{F_{design}} \right)^2 \Rightarrow (\Delta P_H)_{max} = 40 \left(\frac{F_{max}}{100} \right)^2$$

یک فرض معقول: برای سادگی فرض کنید منحنی مشخصه پمپ سانتریفوژ صاف است، یعنی افت فشار کل ثابت می ماند:

$$\Delta P_{total} = \underbrace{\Delta P_v}_{Valve} + \underbrace{\Delta P_H}_{H.Exchanger} \Rightarrow \Delta P_v = \Delta P_{total} - \Delta P_H$$

$$Case 1: \Delta P_{total} = 40 + 20 = 60, C_v = 44.72 \Rightarrow \Delta P_{v,max} = 60 - 40 \left(\frac{F_{max}}{100} \right)^2$$

$$\text{شیر در معادله شیر جاگذاری در معادله شیر} \Rightarrow F_{max} = (44.72) \times (1.0) \times \sqrt{60 - 40 \left(\frac{F_{max}}{100} \right)^2} \Rightarrow F_{max,1} = 115 \text{ gpm}$$

$$Case 2: \Delta P_{total} = 40 + 80 = 120, C_v = 22.36$$

$$\text{شیر در معادله شیر جاگذاری در معادله شیر} \Rightarrow F_{max} = (22.36) \times (1.0) \times \sqrt{120 - 40 \left(\frac{F_{max}}{100} \right)^2} \Rightarrow F_{max,2} = 141 \text{ gpm}$$

حالت $f(x) = 0.1$: حال بینیم فلوی مینیمم چقدر می شود. (معمولاً شیر کنترلها زیر ده درصد باز خیلی خوب عمل نمی کنند، یا کاملاً بسته می شوند، سپس pop می کنند، خوردگی بالا می رود، یا روی جریان نوسان می اندازند،...)

$$Case 1: F_{min} = 44.72 \times 0.1 \times \sqrt{60 - 40 \left(\frac{F_{min}}{100} \right)^2} \Rightarrow F_{min,1} = 33.3 \text{ gpm}$$

$$Case 2: F_{min} = 22.36 \times 0.1 \times \sqrt{120 - 40 \left(\frac{F_{min}}{100} \right)^2} \Rightarrow F_{min,2} = 24.22 \text{ gpm}$$

نتیجه: برای شیر کنترل کوچکتر، هم فلوی max را می توانیم بیشتر بگیریم و هم فلوی min را می توانیم کمتر بگیریم و لذا به زعم مهندسی طراحی (فرایند) برای شیر کنترل کوچکتر turn-down ratio بزرگتری داریم و به زعم مهندسی کنترل (فرایند) برای شیر کنترل کوچکتر rangeability گسترده تری داریم.

پارادوکس پیش آمده: حرف کدام را باور کنیم؟

Case 1: طراح پیشنهاد می کند: عملکرد یکنواخت بهتر و ارزانتر (صرفه جویی انرژی).

Case 2: کنترل پیشنهاد می کند: عملکرد دینامیکی و کنترل بهتر.

برای حل پارادوکس، یک قانون سرانگشتی وجود دارد: افت فشار در شیر کنترل، باید حدوداً ۵۰٪ درصد افت فشار خط (کل سیستم) باشد، یعنی در اینجا، مسیر تانک خوراک تا تانک دریافت کننده.

ولی این قانون خیلی جالب و همه منظوره نیست، چون در برخی مواقع نیاز داریم در شرایط اضطراری، تا سه برابر دبی حالت یکنواخت کار کنیم:

- (دبی باید تا سه برابر تغییر کند): دبی جریان خنک کن برای ژاکت راکتور شامل واکنش شدیداً گرمازا.

- (خیلی مهم نیست، شاید حداکثر تا $\pm 20\%$): دبی خوراک به یک واحد فرایندی.

لذا منطقی خواهد بود اگر یک راه حل سیستماتیک پیدا کنیم:

۱- طراحی (sizing) شیر کنترل و پمپ بر اساس تخمین F_{min} و F_{max} .

۲- طراحی شرایط جریان (افت فشار) بر اساس شرایط یکنواخت برای اجزای مقاومت ثابت فرآیند (مثل مبدل حرارتی)

نکته: معادله فلوی شیر کنترل را دوبار برای F_{min} و F_{max} می نویسیم و دو مجهول نیز داریم: C_{valve} و فشار هد پمپ (ΔP_p).

مثال: می خواهیم یک شیر کنترل برای تامین جریان آب خنک کن یک کویل در یک راکتور گرمازا، سایز کنیم. فلوی نرمال 50 gpm می باشد. برای جلوگیری از حالت اورژانس، فلو باید تا سه برابر جریان نرمال (جریان طراحی - جریان یکنواخت) بتواند تغییر کند. از روی نتایج بهگزینی پش بینی فروش نیز، فلوی مینیمم، نصف مقدار طراحی در نظر گرفته شده است. افت فشار کویل 10 psi در شرایط طراحی (یکنواخت) می باشد. آب خنک کن از یک تانک اتمسفریک تامین می شود. آب خروجی کویل در جریان یوتیلیتی ۲ اتمسفریک از راکتور خارج می شود. شیر کنترل و پمپ سیر کولاسیون را سایز کنید.

$$\frac{\Delta P_{coil}}{10} = \left(\frac{F}{50}\right)^2 \quad \text{رابطه افت فشار کویل با شدت جریان:}$$

$$\Delta P_{valve} = \Delta P_{total} - \Delta P_{coil} = \Delta P_{total} - 10\left(\frac{F}{50}\right)^2 \quad \text{رابطه هد:}$$

معادله فلوی شیر کنترل را در حالت F_{min} و F_{max} می نویسیم:

$$\begin{cases} 150 = C_v(1.0)\sqrt{\Delta P_{total} - 10\left(\frac{150}{50}\right)^2} \\ 25 = C_v(1.0)\sqrt{\Delta P_{total} - 10\left(\frac{25}{50}\right)^2} \end{cases}$$

حل بر حسب C_v و ΔP_{total} :

$$C_v = 21.3 \quad , \quad \Delta P_{total} = 139.2 \quad \Rightarrow \quad \Delta P_{pump} = \Delta P_{total} + 2 = 139.2 + 2 = 141.2 \text{ psi}$$

محاسبه $f_{design}(x)$:

$$50 = 21.3 f_{design}(x) \sqrt{139.2 - 10} \quad \Rightarrow \quad f_{design}(x) = 0.206$$

نکته: اگر F_{min} درست انتخاب نشود، مساله ساز می شود:

$$\begin{cases} F_{max} = C_v(1.0)\sqrt{\Delta P_{total} - (\Delta P_h)_{des.} \left(\frac{F_{max}}{F_{des.}}\right)^2} \\ F_{min} = C_v(f_{min})\sqrt{\Delta P_{total} - (\Delta P_h)_{des.} \left(\frac{F_{min}}{F_{des.}}\right)^2} \end{cases}$$

به طوریکه ΔP_{total} ، افت فشار کل در شرایط طراحی و $(\Delta P_h)_{des.}$ ، افت فشار در مقاومت فیکس (و آنهم در شرایط طراحی) می باشد. همچنین $F_{des.}$ ، فلو در شرایط طراحی و f_{min} ، مینیمم مقدار مجاز باز بودن شیر می باشد.

با حل دو معادله بر حسب ΔP_{total} :

$$\frac{\Delta P_{total}}{(\Delta P_h)_{des.}} = \frac{\left\{ \frac{F_{max}^2 - F_{min}^2}{F_{des.}^2} \right\}}{1 - \left(\frac{f_{min} F_{max}}{F_{min}}\right)^2}$$

آنگاه اگر عبارت سمت راست مخرج معادل واحد شود، نسبت مزبور معادل بی نهایت میشود!

تعریف شاخص Rangeability:

مطابق تعریف گستره عملکرد به شکل زیر تعریف می شود:

$$R = \frac{f_{\min} F_{\max}}{F_{\min}}$$

پس R همیشه باید کوچکتر از ۱ انتخاب شود.

مثال اخیر را با کمی دستکاری دوباره انتخاب می کنیم:

فلوی مینیمم را به جای ۵۰٪، ۴۰٪ فرض می کنیم، در نتیجه ΔP_{total} به جای ۱۳۹/۲ می شود، ۲۰۲ psi و اگر به جای ۴۰ درصد ۳۵ درصد فرض کنیم ΔP_{total} می شود ۳۵۵ و اگر ۳۰ درصد فرض کنیم R می شود ۱ و لذا ΔP_{total} بینهایت می شود:

$$R = f_{\min} \frac{F_{\max}}{F_{\min}} = 0.1 \times \frac{50 \times 3}{50 \times 0.3} = 1$$

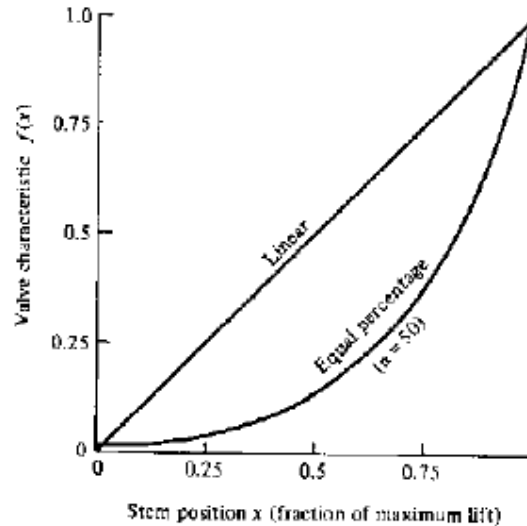
یک راه این است که اگر نسبت turn-down ratio بالا می خواهیم، مینیمم باز بودن شیر کنترل را از ۰/۱ پایین تر بیاوریم. قبلاً هم گفتیم زیر ۰/۱ برای شیر کنترل خطرناک و ریسکی است، لذا دوتا شیر کنترل موازی در جریان می گذاریم، یکی بزرگ و یکی کوچک. این دو را در یک آرایش split range قرار می دهیم، یعنی اول شیر کوچک باز می شود و شیر بزرگتر بعد از اینکه شیر کوچک full open شد باز می شود. بدیهی است این آرایش گرانتر از فقط یک شیر است.

منحنی مشخصه شیر کنترل - با عوض کردن هندسه توپی و بالشتک (plug & seat) انواع رابطه و تابعیت بین موقعیت ساقه و شدت جریان بدست می آید. معروفترین رابطه ها عبارتند از:

Linear Trim Valves: $f(x) = x$,

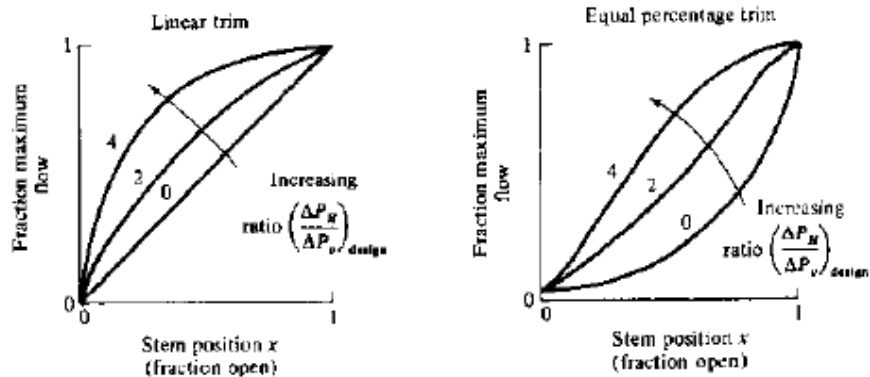
Equal Percentage Trim Valves: $f(x) = \alpha^{x-1}$

منحنی مشخصه ذاتی (Inherent Characteristic) دو شیر فوق الذکر در شکل ۶ نمایش داده شده است.



شکل ۶ - دو منحنی مشخصه ذاتی معروف شیرها.

با فرض افت فشار ثابت و موقعیت ۵۰ درصدی ساقه شیر، یک شیر خطی همیشه ۵۰ درصد ماگزیمم فلو را می‌دهد، در حالیکه شیر متساوی‌الدرصد (با ثابت $\alpha = 50$) معادل ۱۴ درصد ماگزیمم فلو را می‌دهد. در هنگام عمل، بسته به افت فشارهای با مقاومت فیکس، این رفتار عوض می‌شود، لذا یک منحنی مشخصه عملیاتی (Installed Characteristic) برای شیر بدست می‌آورند و بطور نمونه برای دو شیر فوق‌الذکور، منحنی‌های مشخصه در شکل ۷ نشان داده شده‌اند: (دقت شود که ΔP_H ، افت فشار ناشی از دستگاه‌های فرایندی با مقاومت فیکس است و ΔP_V افت فشار شیر کنترل می‌باشد)



شکل ۷- منحنی مشخصه عملیاتی Equal P. Trim (سمت راست) و منحنی مشخصه عملیاتی شیر Linear Trim (سمت چپ).

حال سوال اینجاست، کدام یک را انتخاب کنیم؟

اولاً یک علت تنوع و تکثر trim در شیر کنترلها بحث پایداری در یک گستره عملیاتی وسیع می‌باشد. ثانیاً شیرهای با trim خطی موقعی انتخاب می‌شوند که افت فشار در طول شیر کنترل تقریباً ثابت باشد و رابطه خطی بین متغیر کنترل شونده و متغیر کنترل کننده برقرار باشد. به طور مثال فرض کنید یک مبدل داریم که سیال سرویس آن بخار اشباع با فشار خط تقریباً ثابت باشد. جریان فرایندی از داخل لوله و بخار درون پوسته جریان دارد. برای کنترل دمای خروجی فرایند لوپ کنترل را به این شکل می‌بندیم: دمای خروجی را اندازه گرفته و با مقدار مقرر مقایسه می‌کنیم تا خطا در کنترلر تشکیل شود. کنترلر عمل کنترلی را محاسبه و به شیر کنترل روی خط بخار اشباع ارسال می‌کند. از آنجا که دمای جریان فرایندی با فلو بخار رابطه خطی دارد شیر کنترل را خطی انتخاب می‌کنیم. (هر کیلوگرم بخار مقدار ثابت انرژی، یعنی همان گرمای نهان تبخیر را می‌دهد؛ $Q = F\lambda$ و هر مقدار ثابت انرژی می‌تواند یک مقدار ΔT به صورت گرمای محسوس بدهد: $Q = C_p \Delta T$) ثالثاً شیرهای با Equal p. trim موقعی انتخاب می‌شوند که افت فشار در طول شیر کنترل ثابت نباشد. این عدم ثبات موقعی اتفاق می‌افتد که در بالا دست یا پایین دست شیر کنترل واحدهای فرایندی داریم که به صورت مقاومت ثابت عمل می‌کنند، یعنی با تغییر فلو افت فشار نیز تغییر می‌کند، مثل مثالهای قبل. رابعاً در فلوهای کم عمده افت فشار کل به خاطر شیر کنترلی است ($High \Delta P_V$) و بقیه ناچیز شرکت می‌کنند $Low \Delta P_H$ در فلوهای زیاد برعکس می‌شود، پس:

$$\begin{cases} High \left(\frac{\Delta P_H}{\Delta P_{valve}} \right)_{des.} & \text{when flow is high} \\ Low \left(\frac{\Delta P_H}{\Delta P_{valve}} \right)_{des.} & \text{when flow is low} \end{cases}$$

حال به شکل نگاه کنید، کدام را انتخاب می‌کنید؟

خامساً - Inherent char. یک حالت خاص از Installed Char. است. یعنی وقتی $\Delta P_H = 0$ (مقاومت فیکس) است.

ماجول Valve Positioner

انگیزه و ضرورت: شیر کنترل بعضی مواقع می چسبد (Sticking)، یعنی تنها کنترلی که ما داریم این است که یک سیگنال مثلاً الکتریکی از طرف کنترلر به شیر کنترل ارسال می شود، قبل از اعمال به شیر، از یک I/P (ماجول تبدیل آمپر به سیگنال بادی) می گذرد و یک فشار معادل و متناظر سیگنال کنترلی به دیافراگم شیر اعمال می شود. از اینجا به بعد امیدواریم شیر درست کار کند، یعنی فشار اعمال شده متناسب با فلوی عبوری باشد که ما از شیر با مشخصات خاص خودش انتظار داریم، اما اگر در برخی نواحی (معمولاً در نقاط حدی) امکان چسبیدن وجود داشته باشد، با یک کنترل نوسانی و شبه ناپایدار روبه رو می شویم.

راه حل: یک کنترلر ساده و کوچک در شیر می گذاریم و اصطلاحاً آن را مجهز به یک positioner می کنیم. وظیفه positioner اینست که متناسب با فشار اعمال شده ساقه شیر را در موقعیتی قرار دهد که باید باشد. مضافاً اینکه positioner را می توان در آرایش ها split-range نیز بطور موفق و کارا به کار برد.

نکته: دینامیک شیر کنترل: شیر کنترلها، بویژه از نوع برقی، دارای دینامیک سریع هستند (نسبت به سایر اجزای دینامیکی حلقه کنترل). شیرهای متداول صنعتی و بزرگ، برای حرکت از کاملاً باز به کاملاً بسته با برعکس، تقریباً ۲۰ تا ۴۰ ثانیه طول می دهند. (ثابت زمانی ۴ تا ۱۰ ثانیه)، به همین خاطر شیر کنترل حاضر در یک واحد تقطیر (ثابت زمانی در مرتبه ساعت) را به صورت یک Gain ثابت در نظر می گیرند.

کنترلر

- کنترلرهای آنالوگ و دیجیتال: بخش بزرگی از درس راجع به کنترلرها و عملکرد آنها می باشد. لذا در دو بخش آنها را مطالعه می کنیم: سخت افزاری و نرم افزاری (محاسباتی، بررسی دینامیک و طراحی کنترلر).

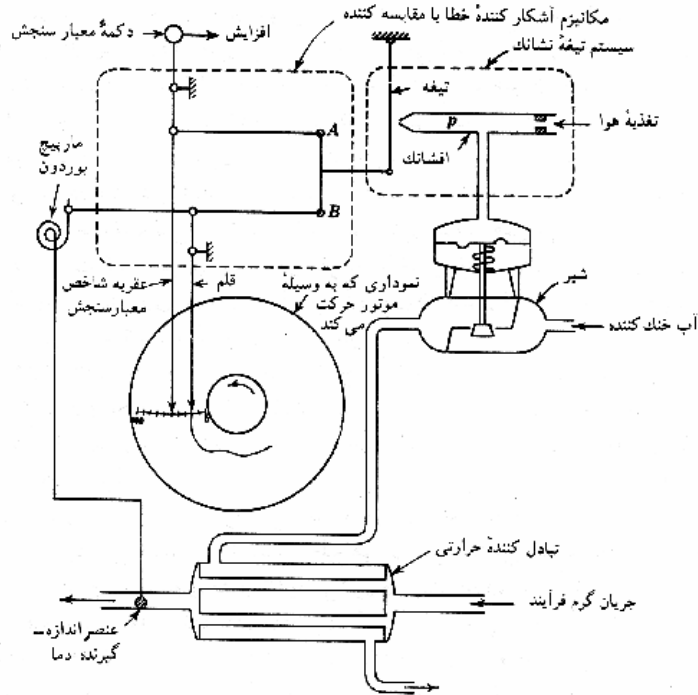
در بخش سخت افزار دو نوع کنترلر داریم:

کنترلرهای آنالوگ (نیوماتیک، الکتریکی): ورودی کنترلر، علاوه بر مقدار مقرر، سیگنال پیوسته (آنالوگ) اندازه گیری (خروجی فرآیند) می باشد که از طرف Transmitter می آید. این سیگنال از نوع فشار هواست (نیوماتیک) یا از جنس میلی آمپر یا ولت. خروجی کنترلر نیز یک سیگنال است که ابتدا وارد ترانسدیوسر می شود و از آنجا به سر actuator (برای فرآیند، شیر کنترل) می رود.

نکته: در مهندسی شیمی بخاطر ایمنی، هم کنترلر و هم شیر کنترل نیوماتیک موجود است. امروزه فقط شیر کنترل نیوماتیک مانده است و کنترلر الکتریکی، الکترونیکی و یا دیجیتال است.

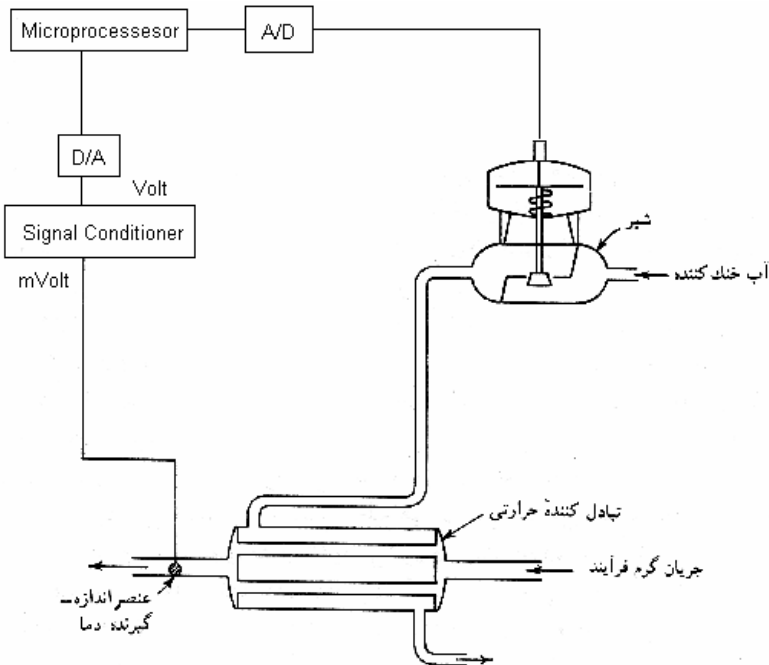
کنترلرهای دیجیتال: ورودی کنترلر، از نوع سیگنال ناپیوسته (discrete) است که در بحث کنترل دیجیتال می گنجد.

مکانیسم کنترلر تناسبی (مکانیکی- نیوماتیک) - در شکل ۷، یک نمونه از سخت افزار سنتی کنترلر تناسبی، یعنی کنترلر تناسبی نیوماتیکی نشان داده شده است. دقت شود تیغه نشان داده شده در شکل، کار تشکیل خطا را انجام می دهد. این خطا (تیغه) هم با جابجایی دگمه مقدار مقرر و هم بر اثر انبساط / انقباض مارپیچ بردن (bourden)، جابجا می شود و باعث تغییر فشار در مکانیسم T می شود، یعنی خروجی کنترلر که سرشیر می رود را متناسب با خطا (موقعیت تیغه) عوض می کند.



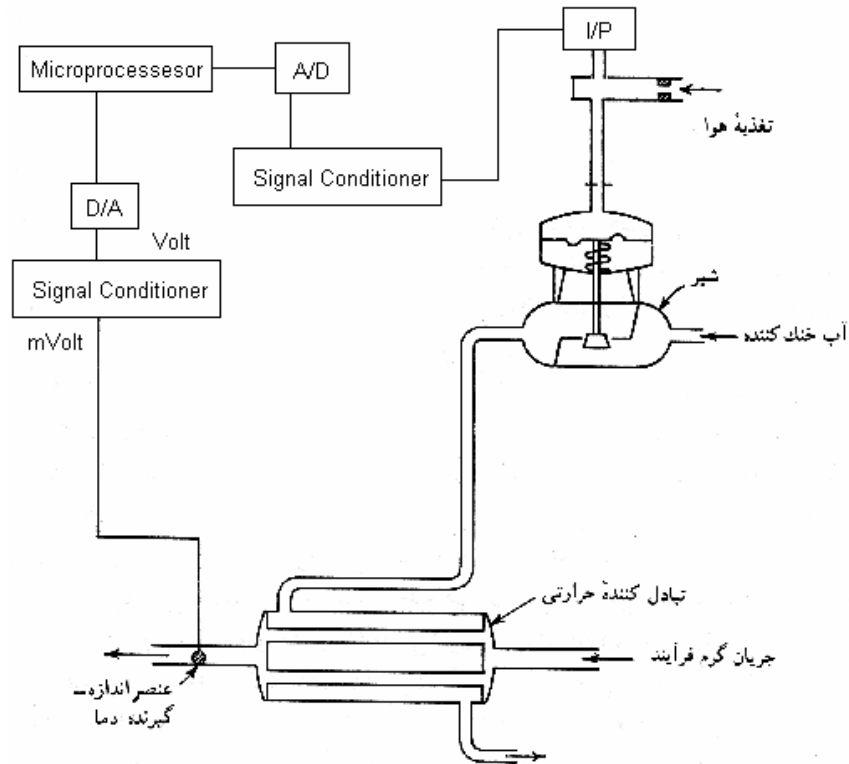
شکل ۷- عملکرد شماتیک یک کنترلر مکانیکی سنتی.

مکانیسم کنترلر دیجیتال (با شیر کنترل برقی) - در شکل ۸، یک نمونه از سخت‌افزار صنعتی کنترلر، یعنی کنترلر فیلد مجهز به میکروپروسسور نشان داده شده است. دقت شود در آرایش کنترلی فرآیند مربوطه از شیر کنترل برقی (stepper motor) استفاده شده است، لذا بعد از محاسبه ورودی فرآیند (خروجی کنترلر) نیاز به تبدیل سیگنال نمی‌باشد. به عبارت دیگر سیگنال خروجی کنترلر با سیگنال سر شیر همسان هستند یعنی هر دو الکتریکی هستند.



شکل ۸- عملکرد شماتیک یک کنترلر الکترومکانیکی همراه با شیر برقی.

در شکل ۹، همان آرایش کنترلی ولی با استفاده از شیر کنترل بادی دایر شده است. بدیهیست برای عمل کردن شیر کنترل باید سیگنال سر شیر از جنس سیگنال فشار هوا باشد، فلذا از یک مبدل سیگنال جریان الکتریکی به سیگنال فشار (ماحول I/P) استفاده شده است.



شکل ۹- عملکرد شماتیک یک کنترلر مدرن (دیجیتال) همراه با شیربندی.

در ادامه به وجه نرم‌افزاری کنترلر فیدبک سنتی (مستقل از مدل یا تابع انتقال فرآیند) می‌پردازیم، یعنی الگوریتم و نحوه محاسبه متغیر کنترل کننده (خروجی کنترلر یا ورودی فرآیند) از روی مقادیر مقرر (ورودی توسط کاربر) و اندازه‌گیری (خروجی فرآیند یا متغیر کنترل شونده).

کنترلر تناسبی (proportional) - به‌طور خلاصه، الگوریتم کنترل عبارتست از:

$$\text{خطای فیدبک} \propto \text{خروجی کنترلر}$$

به عبارت دیگر ماجول کنترلر تناسبی یک المان جبری (استاتیکی) بسیار ساده می‌باشد، به‌طوری‌که خروجی کنترلر متناسب با خطای فیدبک می‌باشد و از هیچ حافظه (انتگرال) یا پیشگویی (مشتق) خطای فیدبک استفاده نمی‌کند. به بیان کمی و عددی، الگوریتم مزبور به شکل زیر است:

$$u(t) = bias \pm K_C (y_{sp} - y_m)$$

به‌طوری‌که اگر خروجی کنترلر را با $u(t)$ نمایش دهیم، آنگاه:

Bias: مقداری ثابت از جنس سیگنال خروجی کنترلر (فشار یا ولت یا میلی آمپر) معادل با خروجی کنترلر وقتی خطا صفر باشد.

K_c : بهره کنترلر، هر چه بزرگتر باشد نشان‌دهنده این است که با اندکی خطای مشاهده شده، خروجی مقدار بزرگی را اختیار کند. بطور کیفی یعنی انگار فرآیند کند بوده (نسبت تغییرات ورودی فرآیند و اغتشاشات) و می‌خواهیم به کمک کنترلر پاسخ فرآیند را تندتر کنیم. برعکس اگر K_c کوچک باشد، یعنی فرآیند تند است و می‌خواهیم دینامیک پاسخ را کند کنیم.

و اگر الگوریتم را به صورتی مناسب برای نمایش در بلوک دیاگرام بخواهیم، باید بر حسب متغیرهای انحرافی بنویسیم:

$$\bar{u}(t) = \pm K_c (\bar{y}_{sp} - \bar{y}_m) = \pm K_c \times e(t) \Rightarrow L\{ \} \Rightarrow G_C(s) = \frac{\bar{u}(s)}{e(s)} = K_c$$

$$\text{where } \bar{u}(t) \triangleq u(t) - \text{bias}, \quad \bar{y}_{sp}(t) \triangleq y_{sp}(t) - y_{sp,ss}, \quad \bar{y}_m(t) \triangleq y_m(t) - y_{m,ss}$$

دقت شود که پارامتر مشخصه و قابل تنظیم دینامیک کنترلر همان K_c است. شایان ذکر است، برخی سازندگان ابزار دقیق از اصطلاح دامنه تناسبی (proportional band) به جای K_c استفاده می‌کنند:

$$\%PB = \frac{100}{K_c}$$

وجه تسمیه آن این است که هرچه PB بزرگ‌تر باشد (K_c کوچکتر)، دامنه و گستره عملکرد کنترلر (خروجی کنترلر) بازای تغییر واحد در خطا پهن‌تر می‌شود.

باید توجه داشت، اگر علامت منفی مثبت (\pm) را برداریم این واقعیت را متذکر می‌شویم که K_c می‌تواند مقادیر هم مثبت و هم منفی را اختیار کند. در عمل، K_c (یا PB) را مثبت اختیار می‌کنند و با نصب Action Mode، (سوییچ به حالات مستقیم/معکوس (Reverse/Direct))، امکان منفی یا مثبت بودن K_c (یا PB) را در کنترلر فراهم می‌کنند:

$$\bar{u}(t) = G_C \times e(s) \quad \text{or} \quad G_C(s) = \frac{\bar{u}(s)}{e(s)} = K_c$$

اگر علامت K_c منفی باشد، به این معنیست که با افزایش خطا، باید کاهش در سیگنال خروجی داشته باشیم و برعکس. در عوض، می‌توانیم K_c را مثبت بگیریم ولی مود عمل را روی معکوس بگذاریم. علامت دقیق K_c تابع عملکرد ترانسیمتر (معمولاً مستقیم است)، عمل شیر کنترل (AC یا AO) و اثر متغیر کنترلی روی متغیر کنترل شونده (مستقیم یا معکوس) می‌باشد.

مزیت عمده کنترلر تناسبی، سادگی و تک پارامتره بودن آن می‌باشد. در طرف مقابل، عیب عمده آن وجود آفست یا خطای یکنواخت یا خطای ماندگار (offset) در فرآیندهاییست که در خود مود انتگرالگیر ندارند، گرچه در برخی مصادیق فرآیندی مثل کنترل سطح این مسئله عیب بزرگی به‌شمار نمی‌آید.

کنترلر On/Off (bang-bang controller): یک حالت خاص از کنترلر تناسبی است:

$$PB = 0 \quad \text{or} \quad K_c \rightarrow \infty$$

از مزایای آن می‌توان سادگی ساختار و سهولت تنظیم آن برشمرد و از معایب آن، به نوسان حول مقدار مقرر موسوم به چرخه حدی (limit cycle)، استهلاک سریع شیر کنترل و مناسب بودن آن برای فقط فرآیندهای خود تنظیم باید اشاره کرد.

کنترلر تناسبی-انتگرالی (Proportional-Integral Controllers): این نوع کنترلر، متداول‌ترین کنترلر صنعتی در صنایع فرآیندی (تقریباً ۸۰ درصد) بوده و از هوشمندی (منسوب به نیوتن) جالبی برخوردار است که از حافظه و تاریخچه خطای فیدبک (به شکل کامپوزیت و لحاظ کردن انتگرال خطا) استفاده میکند. این نکته نیز قابل یادآوریست که کنترلر همچنان مستقل از مدل فرآیندست و فقط خطای فیدبک یعنی میزان انحراف متغیر اندازه‌گیری از مقدار مقرر را می‌بیند.

لازم به ذکرست عمل انتگرالگیری در خود (الگوریتم) کنترلر و نه بیرون از آن انجام می‌شود. الگوریتم (ریاضی - محاسباتی) کنترلر PI و همچنین تابع انتقال آن در زیر آمده است:

$$\bar{u}(t) = K_C e(t) + \frac{K_C}{\tau_I} \int_0^t e(\xi) d\xi = K_C \left(e(t) + \frac{1}{\tau_I} \int_0^t e(\xi) d\xi \right) = K_C e(t) + K_I \int_0^t e(\xi) d\xi$$

$$\bar{u}(s) = K_C e(s) + \frac{K_C}{\tau_I} \frac{1}{s} e(s) = K_C \left(1 + \frac{1}{\tau_I} \frac{1}{s} \right) e(s) = K_C e(s) + K_I \frac{e(s)}{s}, \quad K_I \triangleq \frac{K_C}{\tau_I}$$

$$G_C(s) = \frac{\bar{u}(s)}{e(s)} = K_C + \frac{K_C}{\tau_I} \frac{1}{s} = K_C + K_I \frac{1}{s} = K_C \frac{s + (1/\tau_I)}{s}$$

به‌طوریکه K_C و τ_I مشخصه‌های دینامیکی و پارامترهای قابل تنظیم کنترلر هستند.

نکته: $1/s$ به دو چیز معروفست: اگر سیگنال باشد، یعنی تغییر پله‌ای و اگر تابع انتقال باشد، معروفست به انتگرالگیر، فافهم. مزیت عمده کنترلر PI و هر کنترلر دیگری که مجهز به انتگرالگیر باشد، حذف آفست برای پاسخ مدار بسته به مقادیر مقرر و اغتشاشات با تغییر پله می‌باشد. در طرف مقابل، عیب عمده آن کند کردن پاسخ، نوسانی کردن متغیر کنترل‌شونده و بردن سیستم به سمت ناپایداری می‌باشد.

کنترلر تناسبی - انتگرالی - مشتقی (Proportional-Integral-Derivative Controllers)

این نوع کنترلر، متداول‌ترین کنترلر صنعتی در صنایعی می‌باشد که اندازه‌گیری‌های خروجی‌ها آلوده به نویز نباشند. در این کنترلر، علاوه بر استفاده از حافظه و تاریخچه خطای فیدبک، از مشتق آن نیز بهره می‌برد. لازم به ذکرست عمل انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری در خود (الگوریتم) کنترلر و نه بیرون از آن انجام می‌شود. الگوریتم (ریاضی - محاسباتی) کنترلر PID و همچنین تابع انتقال آن در زیر آمده است:

$$\bar{u}(t) = K_C e(t) + \frac{K_C}{\tau_I} \int_0^t e(\xi) d\xi + K_C \tau_D \frac{de(t)}{dt} = K_C e(t) + K_I \int_0^t e(\xi) d\xi + K_D \frac{de(t)}{dt}$$

$$\bar{u}(s) = K_C e(s) + \frac{K_C}{\tau_I} \frac{1}{s} e(s) + K_C \tau_D s e(s), \quad K_I \triangleq \frac{K_C}{\tau_I}, \quad K_D \triangleq K_C \tau_D$$

$$G_C(s) = \frac{\bar{u}(s)}{e(s)} = K_C + \frac{K_C}{\tau_I} \frac{1}{s} + K_C \tau_D s = K_C + K_I \frac{1}{s} + K_D s$$

K_C ، τ_I و τ_D مشخصه‌های دینامیکی و پارامترهای قابل تنظیم کنترلر هستند.

مزیت عمده استفاده از عمل مشتقی، تند کردن پاسخ خروجی یا متغیر کنترل‌شونده (تغییر در مقدار مقرر یا حذف اغتشاش) است و به‌نوعی خاصیت پیش‌بینی دارد (به شیب خطا نیز حساس است).

عملکرد کنترلرهای مختلف برای حذف اغتشاش - فرض کنید یک حلقه کنترل فیدبک منفی برای کنترل دما

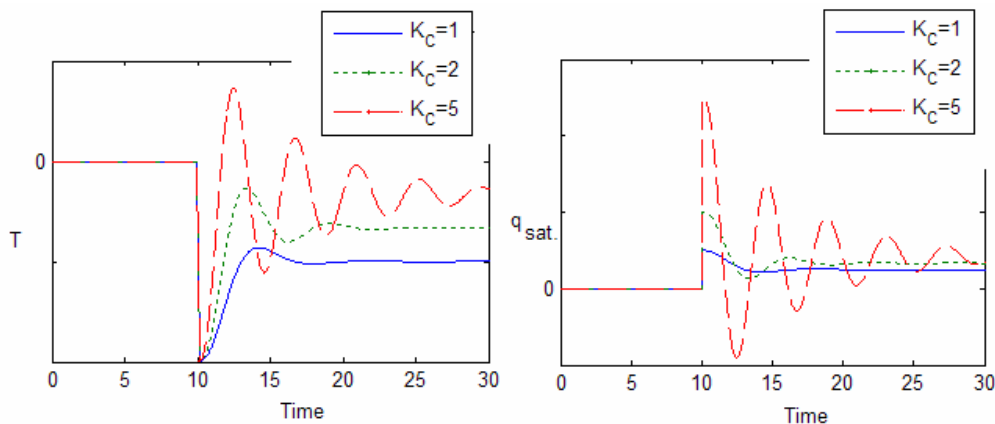
(مثال تانک پیش گرمکن) داریم. متغیرهای اصلی در بررسی عملکرد کنترلرهای مختلف عبارتند از:

متغیر اندازه‌گیری، متغیر کنترل‌شونده، خروجی فرایند: T

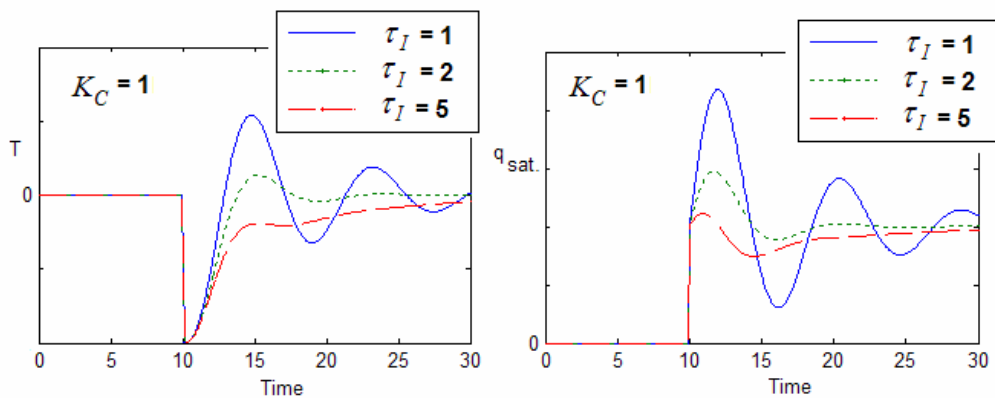
اغتتشاش (ورودی به فرایند): T_{in}

متغیر کنترل‌کننده (خروجی کنترلر یا ورودی به فرایند): q_{sat}

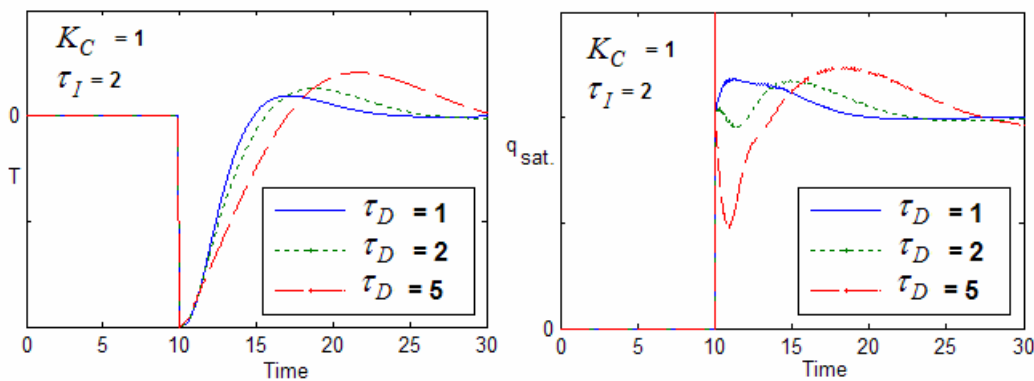
در شکل‌های ۱۰ الی ۱۲، عملکرد کنترلرهای PI، P و PID در حالت بروز اغتشاش پله‌ای در زمان $t = 10$ نشان داده شده‌اند.



شکل ۱۰- عملکرد رگولاسیون کنترلر تناسبی با چند تنظیم نمونه.



شکل ۱۱- عملکرد رگولاسیون کنترلر تناسبی-انتهگالی با چند تنظیم نمونه.

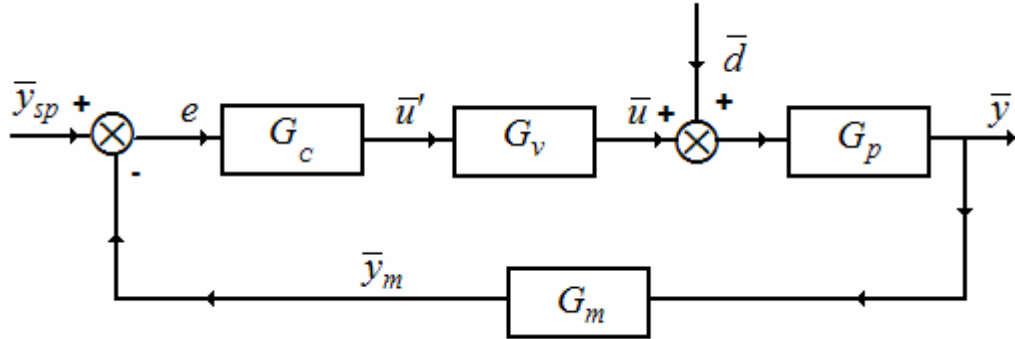


شکل ۱۲- عملکرد رگولاسیون کنترلر تناسبی-انتهگالی-مشتقی با چند تنظیم نمونه.

در همه کنترلرهای دینامیکی، آنهایی که عملکرد خوب دارند، یعنی پاسخ سریع است (حذف اغتشاش سریع) ملاحظه می کنید q_{sat} ، ابتدا از مقدار حالت یکنواخت جدید بالاتر می رود و سپس بعد از نوسان به آن می رسد. در انتها، لازم به ذکر است، تغییر در مقدار مقرر به اصل موضوع لطمه نمی زند بلکه فقط مقدار یکنواخت خروجی، مقدار دیگری باید باشد در حالی که در مورد حذف اغتشاش مقدار نهایی خروجی باید به مقدار اولیه برگردد.

توابع انتقال مدار بسته

یک بلوک دیاگرام ساده و استاندارد در مهندسی شیمی مثل شکل ۱ در نظر بگیرید. دقت شود که سیگنال‌های نوین و اغتشاش را در خروجی نگذاشتیم، تا بررسی پایه‌ای مدار ساده و غیر تودرتو (Nested) باشد.



شکل ۱. یک بلوک دیاگرام ساده برای نمایش سنتی مدار بسته فیدبک منفی.

اگر سنسور سریع باشد، معمولاً دینامیکی (جملات دارای s) برای G_m در نظر نمی‌گیرند و G_m را به صورت بهره واحد نشان می‌دهند: $G_m = 1$ ، در این صورت به حلقه فیدبک می‌گویند، فیدبک واحد. اگر شیر کنترل نسبت به فرآیند سریع باشد $\tau_{valve} \ll \tau_{plant}$ ، آن را با یک بهره مثل K_{valve} نمایش می‌دهند و چون بلافاصله بعد از کنترلرست، K_{valve} در K_C کنترلر ضرب می‌شود، لذا K_{valve} را در همان ضرایب کنترلر ملحوظ می‌کنند. به علامت \otimes می‌گویند comparator، اگر حداقل یک علامت منفی داشته باشد (تا با مسمأ شود)، ولی اگر همه ورودی‌ها به صورت جمع ظاهر شوند، می‌گویند combiner (نمی‌گویند summer!!). این علامت چند ورودی دارد ولی همیشه یک خروجی دارد.

به مجموعه بلوک‌های مابین \otimes تا متغیر کنترل شونده می‌گویند،

- مسیر پیشرفت (Forward path)، اگر \otimes ، \otimes باشد.

- مسیر پیش رو (Feed Forward)، اگر \otimes ، \otimes باشد.

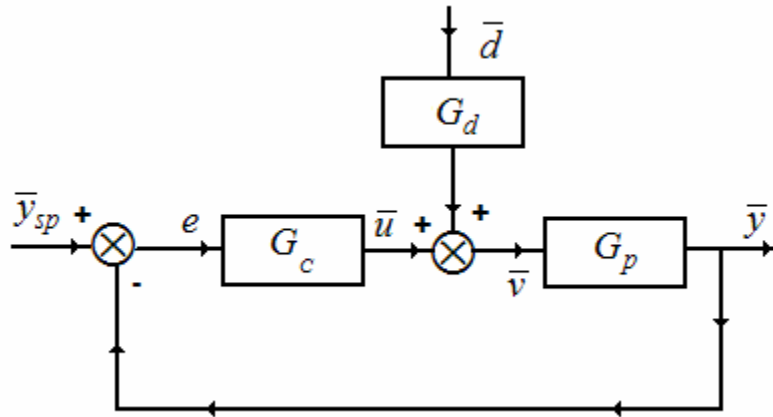
یا برای راحتی، می‌گویند مدار باز، چون سیگنال فیدبک \bar{y}_m محسوب نمی‌شود. چون مدار را از اینجا ($\bar{y}_m(t) = 0$) باز کرده‌اند. به همین خاطر، شکل بسیار ساده ولی رایج به صورت بلوک دیاگرام شکل ۲ است. در ادامه، برای دنبال کردن مفهوم، از این بلوک دیاگرام بیشتر استفاده می‌کنیم.

مدار باز: محاسبه \bar{y} (خروجی) بر حسب ورودیهای فرآیند (\bar{u} و \bar{d})

$$\begin{cases} \bar{v} = G_d \bar{d} + \bar{u} \\ \bar{y} = G_p \bar{v} \end{cases} \Rightarrow \dots \text{حذف متغیر میانی} \dots \bar{y} = G_p (G_d \bar{d} + \bar{u}) \Rightarrow \bar{y} = G_p G_d \bar{d} + G_p \bar{u} \Rightarrow$$

$$\bar{y} \text{ بر } \bar{d} \text{ اثر: } \bar{y} = G_p G_d \bar{d} + 0 \Rightarrow \frac{\bar{y}}{\bar{d}} = G_p G_d$$

$$\bar{y} \text{ بر } \bar{u} \text{ اثر: } \bar{y} = 0 + G_p \bar{u} \Rightarrow \frac{\bar{y}}{\bar{u}} = G_p$$



شکل ۲. شکل رایج یک بلوک دیاگرام ساده تک حلقه.

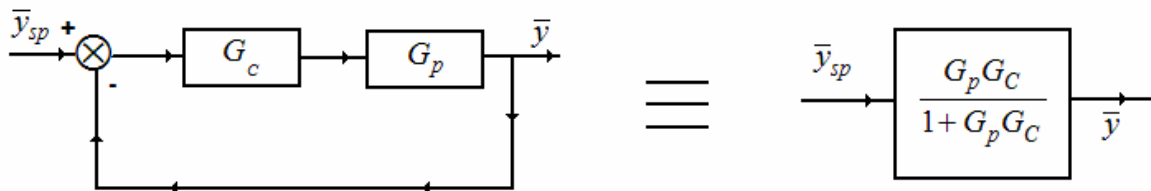
مدار بسته: محاسبه \bar{y} (خروجی) بر حسب ورودیهای سیستم مدار بسته (\bar{y}_{sp} و \bar{d})

$$\begin{cases} \bar{v} = G_d \bar{d} + \bar{u} \\ \bar{u} = G_c e \\ e = \bar{y}_{sp} - \bar{y} \end{cases} \Rightarrow \bar{y} = G_p G_d \bar{d} + G_p G_c (\bar{y}_{sp} - \bar{y}) \Rightarrow \bar{y}(1 + G_p G_c) = G_p G_d \bar{d} + G_p G_c \bar{y}_{sp} \Rightarrow$$

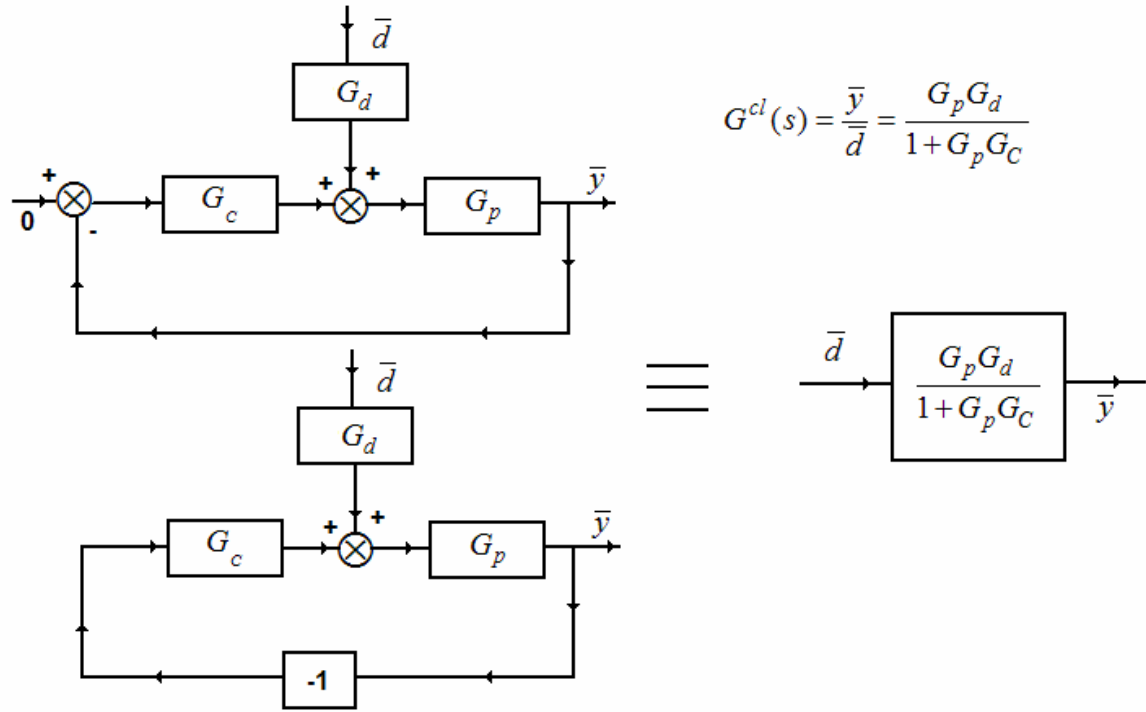
$$\bar{y} = \frac{G_p G_d}{1 + G_p G_c} \bar{d} + \frac{G_p G_c}{1 + G_p G_c} \bar{y}_{sp}$$

رابطه مدار بسته، فقط برای تغییر در مقدار مقرر در شکل ۳ نشان داده است و رابطه مدار بسته برای تغییر در بار در شکل ۴ نشان داده شده است.

$$G^{cl}(s) = \frac{\bar{y}}{\bar{y}_{sp}} = \frac{G_p G_c}{1 + G_p G_c}$$



شکل ۳. بلوک دیاگرام ساده تک حلقه (مدار بسته)، وقتی فقط مقدار مقرر تغییر کند.



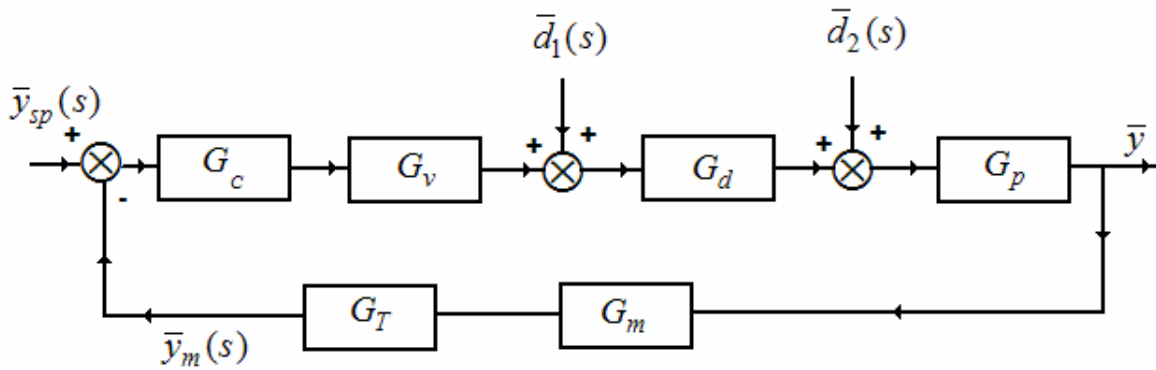
شکل ۴. بلوک دیاگرام ساده تک حلقه (مدار بسته)، وقتی فقط اغتشاش در ورودی تغییر کند.

به عنوان یک رابطه کلی، نحوه ساختن سریع تابع انتقال مدار بسته از روی بلوک های مدار به شکل زیر می باشد:

$$\frac{\bar{Y}(s)}{\bar{X}(s)} = \frac{\prod_{(forward\ path\ from\ X\ to\ Y), i} G_i}{1 \mp \prod_{(all\ blocks\ in\ the\ loop), i} G_i}, \quad !!! \begin{cases} minus(-) \text{ for positive}(+) \text{ feedback} \\ positive(+) \text{ for minus}(-) \text{ feedback} \end{cases}$$

مثال: می خواهیم توابع انتقال زیر را بدون عملیات جبری (حذف سیگنال های میانی) در بلوک دیاگرام شکل ۵، بدست آوریم:

$$\frac{\bar{y}(s)}{\bar{y}_{sp}(s)}, \quad \frac{\bar{y}(s)}{\bar{d}_1(s)}, \quad \frac{\bar{y}(s)}{\bar{d}_2(s)} = ?$$



شکل ۵. بلوک دیاگرام مثال مورد بحث.

بعد از ضرب بلوک‌های سریال، می‌توان با بهره‌گیری از فرمول کلی اخیرالذکر به توابع انتقال مورد درخواست مسئله رسید:

$$\frac{\bar{y}(s)}{\bar{y}_{sp}(s)} = \frac{G_C G_v G_d G_p}{1 + G_C G_v G_d G_p G_m G_T}$$

$$\frac{\bar{y}(s)}{\bar{d}_1(s)} = \frac{G_d G_p}{1 + G_C G_v G_d G_p G_m G_T}$$

$$\frac{\bar{y}(s)}{\bar{d}_2(s)} = \frac{G_m G_T G_p}{1 + G_C G_v G_d G_p G_m G_T}$$

نکته: قانون کلی گفته شده برای مدار ساده (غیر Nested و غیر branched) بوده و گرنه تا آنرا به شکل مدار ساده تبدیل نکنیم در نظر اول نمی‌توانستیم به این سرعت مسأله را حل کنیم. برای مدارات پیچیده‌تر، سعی می‌شود از جبر بلوک دیاگرام استفاده شده و مرتباً نمودار را به حالات ساده (فیدبک منفی و مثبت برای حلقه‌های داخلی) و عملیات انتقال برای نقاط انشعاب تقلیل دهیم.

جبر بلوک دیاگرام‌ها (Visualizing system Dynamics)

علت وجودی بلوک دیاگرام، در درجه اول، تأمین فلسفه و شناخت ماهیت دینامیکی یک سیستم متغیر با زمان مستقل از الگوریتم پیاده‌سازی می‌باشد. این کار با رسم بلوک‌های دینامیکی و استاتیکی و پیونددهنده‌ها برای قضاوت کیفی راجع به رفتار ساختاری سیستم انجام می‌شود. از آنجائیکه انتقال اطلاعات بصورت گرافیکی، سریع‌ترین و همچنین سهل‌ترین نحوه شکل‌گیری درک و انتزاع ذهنی (Visualization) می‌باشد، نمایش ساختار دینامیکی بصورت بلوک دیاگرام یکی از بهترین شیوه‌های انتقال ایده برای طراحی و تحلیل سیستم‌های دینامیکی می‌باشد. ایده‌هایی مثل فیدبک، کانال‌های انتگرال‌گیر، کنترل مدل داخلی (IMC)، فیدبک حالت، کنترل مقاوم، حلقه‌های درهم، جبران‌کننده تأخیر انتقالی (پیش بین اسمیت) و... همگی از نمایش بلوکی عناصر دست‌اندرکار بهره گرفته‌اند.

یک کاربرد دیگر، پدیده‌ای بنام Visual Editing در مباحث Computer-Aided Software Design، موسوم به CASE می‌باشد. در این روش بجای نوشتن معادلات دیفرانسیال حاکم در یک محیط ویژه و با یک زبان برنامه‌نویسی خاص و انتخاب روش حل، متناظراً بلوک دیاگرام گذاشته شده و به‌طور گرافیکی (Drag & Drop)، ورودی‌ها و خروجی‌های سیستم رسم می‌شوند. یک مثال خوب و موفق، عملیات تشریح و توصیف دینامیک سیستم‌ها بصورت نمایش بلوکی در بسته ابزار Simulink (تحت MATLAB) می‌باشد.

تقلیل بلوک دیاگرام - معمولاً بعد از بدست آوردن معادل بلوکی یک دستگاه دیفرانسیل پیچیده، آن را ساده کرده و به عبارتی بلوک‌ها را «تقلیل معادل» می‌دهند. نکات مهم برای پیاده‌سازی عبارتند از:

- ۱- در صورتی چند جعبه را در هم می‌توان ضرب کرد (بلوک معادل بلوک‌های زنجیره‌ای) که بین آنها فقط یک سیگنال وجود داشته باشد، یعنی خروجی قبلی، باید ورودی بعدی باشد.
- اگر در این بین جریان دیگری اضافه یا کم شود، باید اثر آن را لحاظ نمود.
- ۲- در صورتی که چند حلقه فیدبک (اعم از مثبت و منفی) وجود داشته باشد، تقلیل بلوک را باید گام به گام انجام داد.
- ۳- تقلیل بلوک دیاگرام‌ها توسط دو کار (Task) عمده «بازآرایی» و «ساده‌سازی» انجام می‌شود.

۴- هر چه بلوک دیاگرام ساده تر می شود، توابع انتقال هر جعبه پیچیده تر می شود.
 ۵- دقت کنید برای جایگزین هر زیر بلوک با یک بلوک، به ورودی و خروجی ها توجه کنید. باید بر اثر تقلیل مربوطه، مقدار سیگنال عوض نشود.

در جدول نشان داده شده در شکل ۶، قوانین تبدیل بلوک درج شده است، از میان آنها، سه قانون بسیار مهم است:
 ردیف ۱: خاصیت جابجایی پیونددهندهها (Summing Points)، مادامی که هیچ بلوکی بیناین نباشد.
 ردیف ۱۲: بدست آوردن فیدبک واحد، موقعی میسر است که عکس دینامیک مسیر فیدبک در اول قرار داده شود.
 ردیف ۱۳: (به علاوه فیدبک مثبت) حذف لوپ فیدبک با جایگزین یک بلوک هموگرافیک، یعنی رابطه

$$X = \frac{Y}{1-Y} \Leftrightarrow Y = \frac{X}{1+X}$$

	Original Block Diagrams	Equivalent Block Diagrams		Original Block Diagrams	Equivalent Block Diagrams
1			B		
2			9		
3			10		
4			11		
5			12		
6			13		
7					

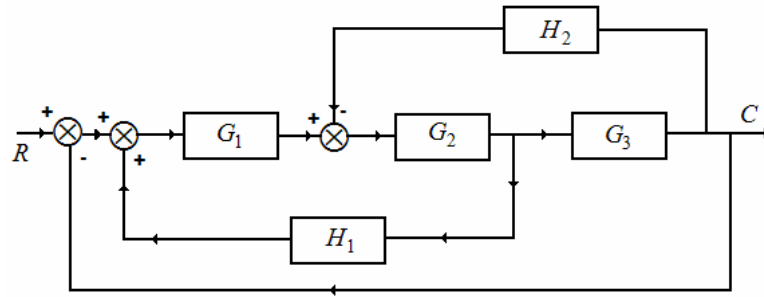
شکل ۶. قوانین جبر بلوک دیاگرامها.

در ادامه، به یک مثال جهت آشنایی و طرز استفاده از جدول فوق الذکر پرداخته می شود. شاید تنها نکته ظریف مثال، همان گام اول تقلیل باشد، چون دو حلقه موجود بطور مزدوج درهم گیر شده اند و به صورت لوپ داخلی و لوپ خارجی (Nested loop) نیستند، فافهم!

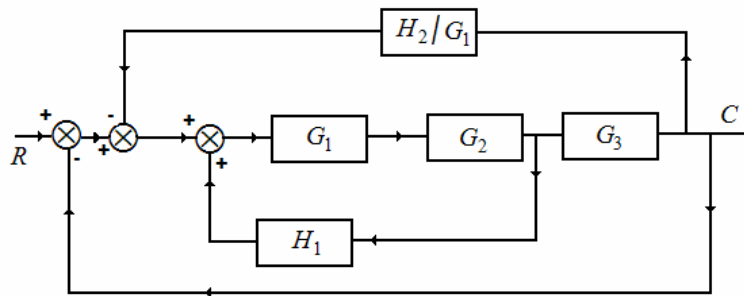
مثال: مطلوبست تقلیل گام به گام دیاگرام زیر:

شروع: قانون ۶ و سپس

قانون ۱

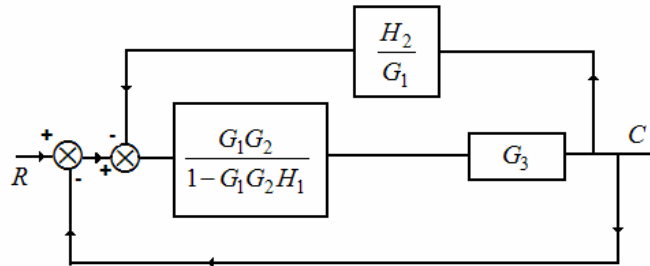


⇓

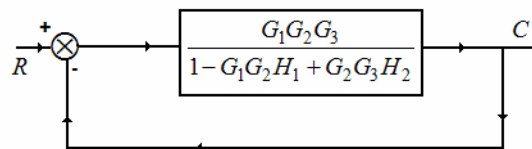


قانون ۱۳ ولی با

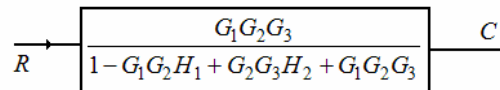
فیدبک مثبت



⇓ قانون ۱۳



⇓ قانون ۱۳



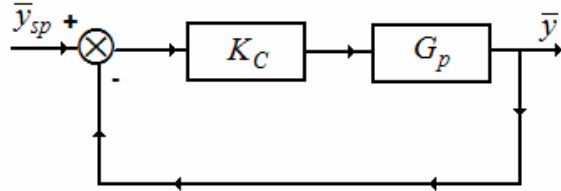
نکته: تکنیک دیگری وجود دارد بنام «گراف‌های جریان سیگنال» (signal Flow Graphs). مبدع این تکنیک پرفسور Mason می‌باشد. تکنیک مزبور ماهیتاً با ایده بلوک دیاگرام یکی است ولی کیفیتاً متفاوت است. لذا از نظر کاربردی هیچ کدام نسبت به دیگری تفوق و برتری نداشته و انتخاب هر کدام به سلیقه و مهارت کاربر بستگی دارد:

Mason, S.J. "Feedback Theory: Some Properties of Signal Flow Graph", Proc. IRE, 44, (1965), pp. 920-926.

پاسخ‌های گذاری مدار بسته

در این بخش می‌خواهیم با دانش یا دانسته‌های فعلی کمی بازی کنیم تا اثر بستن مدار فیدبک را در ذهن مانوس کنیم.

مثال - مدار فید بک ساده (تغییر در مقدار مقرر) زیر را که کنترلر تناسبی است در نظر بگیرید:



الف - فرض کنید G_p تابع انتقالی نامی یک فرآیند درجه اول است، $G_p = \frac{K_p}{\tau_p s + 1}$

مطلوبست اثر $K_C (> 0)$ روی بهره یکنواخت و سرعت پاسخ مدار بسته:

$$\frac{\bar{y}(s)}{\bar{y}_{sp}(s)} = \frac{K_C G_p}{1 + K_C G_p} = \frac{K_C \frac{K_p}{\tau_p s + 1}}{1 + K_C \frac{K_p}{\tau_p s + 1}} = \frac{K_C K_p}{\tau_p s + 1 + K_C K_p} = \frac{\frac{K_C K_p}{1 + K_C K_p}}{\frac{\tau_p}{1 + K_C K_p} s + 1} \Rightarrow$$

$$G^{cl}(s) = \frac{\bar{y}(s)}{\bar{y}_{sp}(s)} = \frac{K^{cl}}{\tau^{cl} s + 1}, \quad K^{cl} \triangleq \frac{K_C K_p}{1 + K_C K_p}, \quad \tau^{cl} \triangleq \frac{\tau_p}{1 + K_C K_p}$$

با مقایسه معلوم می‌شود که \bar{y} نمی‌تواند \bar{y}_{sp} را تعقیب کند، به بیان دیگر اگر \bar{y}_{sp} یک پله تغییر پیدا کند:

$$\text{میزان خطای ماندگار (آفست)} = 1 - \frac{K_C K_p}{1 + K_C K_p} = \frac{1}{1 + K_C K_p}$$

از آنجا که K_p را که نمی‌توانیم دست بزنیم، پس هر چه K_C را بزرگتر انتخاب کنیم، (به بهای حساستر شدن پاسخ) آفست کمتر می‌شود.

برای بررسی سرعت پاسخ نیز، ملاحظه می‌کنیم که τ_p باندازه $1 + K_C K_p$ کوچک شده است و چون $1 + K_C K_p > 1$ است، پس K_C هر چقدر هم کوچک باشد، بخاطر فیدبک، سرعت مدار بسته بیشتر شده است.

مثال: همان مثال قبلی را ولی بایک کنترلر تناسبی - انتگرالی در نظر بگیرید؛

$$\frac{\bar{y}(s)}{\bar{y}_{sp}(s)} = \frac{(K_C + K_I / s) G_p}{1 + (K_C + K_I / s) G_p} = \frac{K_C K_p s + K_I K_p}{\tau_p s^2 + (1 + K_C K_p) s + K_I K_p}$$

مشاهده می‌کنیم رفتار مدار بسته به شکل دینامیک درجه دوم درآمد!

مقدمه

یکی از مفردات فلسفه فیدبک پایدارسازی فرآیندهای ناپایدار است. به عبارت دیگر انگیزه سنتز و طراحی کنترلر می‌تواند عملاً ساخت یک پایدارساز (Stabilizer) می‌باشد تا یک جبران‌کننده یا رگولاتور. این بحث را می‌توان در قالب یک مسئله سیستماتیک یعنی نحوه نگرش کلان به افق طراحی کنترلر طرح کرد. هدف غالب و عمده طراحی کنترلر به دو شکل است، یکی طراحی عملکرد-محور (Performance-Oriented) و دیگری پایدار-محور (Stability-Oriented). در نگرش اول، به دنبال کنترل بهتر هستیم. تعریف کنترل بهتر یا کنترل با عملکرد خوب معمولاً سلیقه‌ای، تجربی، سماعی و وابسته به مسئله می‌باشد. به طور مثال یک شاخص کنترل خوب یا عملکرد بهینه می‌تواند نداشتن آفست باشد، یا اورشوت (پاسخ مدار بسته) زیر ۱۶٪ باشد یا ثابت زمانی مدار بسته (حضور کنترلر) یکدهم ثابت زمانی فرآیند باشد. در نگرش دوم، وضع متفاوت است. در نگرش پایدار-محور، فرآیند مورد نظر، بدون کنترل اصلاً موضوعیت ندارد، چرا که در عمل با یک تغییر کوچک در شرایط فرآیندی (اختشاش)، سیستم از حالت یکنواخت و مقرر فرآیندی دور شده و دیگر به شرایط قبل بر نمی‌گردد و به لسان کنترلی با یک تغییر کوچک و محدود در ورودی (متغیر تاثیرگذار)، شاهد تغییر نامحدود در خروجی (متغیر تاثیرپذیر) هستیم و به عبارت خلاصه با پدیده ناپایداری دینامیکی روبرو هستیم. در این حالت، علت وجودی کنترلر در درجه اول حفظ پایداریست تا عملکرد بهتر و بدیهیست تا سیستم یک رفتار معقول، مقبول و پایدار نداشته باشد، صحبت از سریع‌تر شدن پاسخ یا نداشتن آفست، نابجا و بی‌معناست.

هدف از این بخش معرفی مبادی تصور از مفهوم پایداری می‌باشد ولی تاکید ویژه روی استفاده ابزاری از تبدیل لاپلاس در قالب قضایای مهندسی برای بررسی پایداری مدار بسته از روی تابع انتقال مدار باز خواهیم داشت.

انواع پایداری

مفهوم پایداری یک مفهوم موسّع در بسیاری از شاخه‌های علوم می‌باشد. مساله رشد سرطانی در علوم پزشکی، توسعه پایدار (Sustainability) در اقتصاد مدرن و تعادل استاتیکی پایدار، همگی از مفهوم پایه‌ای پایداری بهره می‌برند. ولی آنچه که مورد نظر ماست مسئله پایداری دینامیکی و آن هم فقط شاخه‌ای از آن یعنی پایداری به مفهوم ورودی محدود - خروجی محدود می‌باشد. به عبارت دقیق‌تر، می‌خواهیم بدانیم چه موقع ممکنست یک سیستم وقتی به صورت محدود (bounded) تحریک می‌شود از خود یک پاسخ نامحدود (Unbounded) نشان بدهد، و از آن مهم‌تر، چگونه و با چه شاخصی می‌توانیم آن را اندازه بگیریم (!) یا وقوع یا بروز آن را در رفتار سیستم پیش‌بینی کنیم؟

به هر حال، بحث و تحلیل روی پاسخ خروجی نسبت به نوع و ساختار ورودی را می‌توان از دو زاویه نگریست. یکی در دامنه زمان و دیگری در دامنه لاپلاس.

رابطه پایداری با مشخصه‌های دینامیکی (دامنه زمان - معادله دیفرانسیل)

معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت زیر را در نظر بگیرید:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y + a_n = b_0 u^{(m)} + \dots + b_m, \quad m \leq n$$

این معادله می‌تواند مدل تقریبی یک سیستم فیزیکی اعم از مدار باز و بسته باشد، بطوریکه y خروجی (پاسخ) سیستم و u تابع تحریک می‌باشد. برای تحلیل در دامنه زمان، باید حل یا لااقل ساختار حل معادله را بدانیم.

همانطور که در مباحث قبلی به کرات مشاهده کرده‌اید، پاسخ (یا حل معادله) خروجی همیشه مجموع یا ترکیبی از جملات نمایی به شکل $t^p e^{(\alpha_i + \beta_i j)t}$ بوده است (بطوریکه $p = 0, 1, 2, \dots, n$). در مسایل پایداری، با توجه به تعریف آن، توجه اصلی باید روی علامت α_i باشد، چرا که اگر α_i مثبت باشد، ترم $e^{\alpha_i t}$ باعث نامحدود شدن خروجی می‌شود و اگر صفر باشد، بسته به اینکه p صفر است یا غیر صفر، خروجی در آستانه ناپایداری قرار گرفته ($p = 0$) یا مطلقاً ناپایدار می‌شود ($p \geq 1$). در دامنه لاپلاس، به جملاتی متناظر با جمله فوق‌الذکر، یعنی $\frac{1}{[s - (\alpha_i + \beta_i j)]^p}$ بر می‌خوریم که p درجه تکرار ریشه یا قطب $s - (\alpha_i + \beta_i j)$ می‌باشد. لذا در بحث پایداری (به زبان تبدیل لاپلاس) می‌گوییم در صورتی که قسمت حقیقی قطبها (یعنی α_i) منفی باشد، سیستم (خروجی) پایدار است.

رابطه پایداری با مشخصه‌های دینامیکی (دامنه لاپلاس - تابع انتقال)

تابع انتقال معادله دیفرانسیل فوق‌الذکر را می‌توان با تبدیل گرفتن لاپلاس از طرفین به شکل زیر به دست آورد:

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{C_1}{s - s_1} + \frac{C_2}{s - s_2} + \dots$$

به‌طوریکه $B(s)$ یک چند جمله‌ای از s با درجه m و $A(s)$ یک چند جمله‌ای از s با درجه n می‌باشد:

$$B(s) = b_0 s^m + \dots + b_m$$

$$A(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n$$

یکی از جملات را در نظر بگیرید (واصل برهم‌نهمش را بخاطر آورید): $\frac{C_i}{s - s_i}$

حال مثلاً ورودی پله ($\frac{1}{s}$ = ورودی) را به‌عنوان یک ورودی محدود در نظر بگیرید. پاسخ سیستم می‌شود جمع پاسخ‌های

توابعی مثل $\frac{C_i}{s - s_i}$ ، طبق خاصیت شیفت تبدیل می‌شود و عبارت $e^{s_i t}$ در دامنه زمان ظاهر می‌شود، حال اگر s_i یک عدد منفی

باشد این عبارت میرا شونده است. در حالت کلی s_i را یک عدد مختلط بگیرید، لذا باید قسمت حقیقی s_i منفی باشد، تا عبارت نمایی، میرا شونده باشد.

پس شرط پایداری BIBO برای سیستم‌های خطی این است:

ریشه‌های چند جمله‌ای مخرج تابع انتقال باید در سمت چپ (Left Half plane-LHP) صفحه کمپلکس قرار داشته

باشند، در صورتی که حتی یک ریشه در RHP قرار داشته باشد، دینامیک سیستم (تابع انتقال سیستم) ناپایدار است.

بدین ترتیب مسأله ظاهراً کیفی پایداری به مسأله کمی تعریف پایداری BIBO تقلیل پیدا کرد و سپس به مسأله تشخیص علامت

ریشه‌های چند جمله‌ای مخرج تابع انتقال کاهش پیدا کرد!

برای تشخیص پایدار یا ناپایدار بودن یک دینامیک با معادله مشخصه چند جمله‌ای، دو روش وجود دارد، که هر دو مبتنی بر قضیه اصلی جبر (منسوب به اوایلر) می‌باشند:

روش اول: حل چند جمله‌ای مخرج تابع انتقال و محاسبه ریشه‌ها،

روش دوم: بدون محاسبه ریشه‌ها و فقط با استفاده از ضرایب چند جمله‌ای، یعنی به نوعی «آزمون».

انواع آزمون‌های تست علامت ریشه‌های چند جمله‌ای‌ها

قانون علامات دکارت (Decarte's Rule of sign): یک قاعده سرانگشتی و سریع برای قضاوت در مورد علامت ریشه‌های یک چند جمله‌ای همین قانون دکارت می‌باشد. این قانون می‌گوید: تعداد ریشه‌های مثبت حقیقی نمی‌تواند بیشتر از تعداد تغییر علامت ضرایب چند جمله‌ای باشد. لذا یک شرط لازم (ولی نه الزاماً کافی) برای پایداری یک تابع انتقال این است که ضرایب چند جمله‌ای مخرج همگی هم علامت باشند. در صورتی که تغییر علامت داشتیم حتماً ناپایدار است و اگر نداشتیم، سیستم مستعد پایداری است. چون این قاعده راجع به ریشه‌های حقیقی صحبت کرده است و نه کمپلکس، در نتیجه برای ضرایب هم علامت احتمال وجود ریشه‌های کمپلکس RHP وجود دارد.

معیار روت (Routh's criteria): این معیار نیز شرط لازم را بیان می‌کند ولی فایده آن این است که به تمام ریشه‌های چند جمله‌ای اعم از حقیقی و کمپلکس می‌پردازد. این معیار، کاربردی‌ترین معیار پایداری (برحسب چند جمله‌ای‌ها) در سیستم‌های پیوسته (لاپلاس) می‌باشد.

معیار Hurwitz: این معیار بسیار شبیه به معیار روت می‌باشد ولی محکم‌تر و اصیل‌تر است چون شرط لازم و کافی را بیان می‌کند (در حوصله این درس نیست و در دروس کنترل مقاوم مطرح می‌شود).

معیار Jury: این معیار نیز برگردان محکم روت در سیستم‌های گسسته می‌باشد (در حوصله این درس نیست و در دروس کنترل دیجیتال مطرح می‌شود).

آزمون Routh

روشی که با استفاده از فقط ضرایب یک چند جمله‌ای (بدون حل و محاسبه ریشه‌ها)، تعداد ریشه‌های دارای قسمت حقیقی مثبت (RHP) را معلوم می‌کند.

شرح روش: اگر معادله مشخصه چند جمله‌ای را به شکل زیر نشان دهیم:

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

گام اول: ضرایب معادله را بصورت زیگزاگ می‌نویسیم:

$$\begin{array}{cccc} a_0 & a_2 & a_4 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_3 & \dots & \end{array}$$

گام دوم: سطر سوم را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم.

$$b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad \dots$$

به طوریکه:

$$b_1 \triangleq \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} \quad \text{or} \quad \frac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}}{a_1}, \quad b_2 \triangleq \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} \quad \text{or} \quad \frac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}}{a_1}$$

گام سوم: سطرهای بعدی را نیز به همین ترتیب بدست می آوریم تا به سطرهایی برسیم که دیگر نتوان درمینان تشکیل داد.
گام چهارم: بعد از تکمیل جدول، معیار (محک) روت را اعمال می کنیم.

قضایای آزمون روت:

- 1- شرط لازم و کافی برای اینکه تمام ریشه‌های چند جمله‌ای (با ضرایب حقیقی) در LHP باشند این است که تمام عناصر ستون اول آرایه روت، مثبت و مخالف صفر باشند.
- 2- اگر برخی از عناصر ستون اول منفی باشند، عدّه ریشه‌های RHP برابر عدّه تغییر علامت در ستون اول است.

شگردها و نکات آزمون روت (Tips & Tricks)

- در یک چند جمله‌ای با ضرایب حقیقی، همیشه ریشه‌ها حقیقی هستند و اگر ریشه کمپلکس داشته باشیم، بصورت جفت مزدوج (کمپلکس کونژوگه) ظاهر می شوند؛ بنابراین چند جمله‌ای با ضرایب حقیقی، هیچوقت به تعداد فرد ریشه کمپلکس ندارد.
- در صورت مشاهده صفر در ستون اول، سیستم در آستانه ناپایداری است.
- در صورت تکرار صفر در ستون اول یا وجود همه صفر در یک سطر، نشان از چیزهایی دارد که خیلی به آزمون روت مربوط نمی شود و باید از سایر قضایای چند جمله‌ای‌ها استفاده کرد. برای این نوع حالات خاص به صورت مجزا بحث خواهیم کرد.
- وجود ضریب منفی در چند جمله‌ای را با قانون دکارت بررسی کنید.
- با توجه به فرمول محاسبه آرایه روت، یک سطر را می توان به هر عدد مثبت تقسیم یا ضرب کرد. معمولاً از این کار برای سرعت و سادگی محاسبات استفاده میشود.
- هنگام تشکیل آرایه روت، هر کجا ضریب نداشتید، برای تقارن صفر بگذارید (مثلاً اگر تعداد ضرایب فرد بود، با صفر گذاشتن آنرا زوج کنید)
- نحوه محاسبه گفته شده بدرد کامپیوتر می خورد، و برای حل دستی همیشه از تکنیک‌های ذکر شده استفاده کنید.
- قانون و معیار روت فقط چند جمله‌ای‌ها کاربرد دارد. در صورت حضور جملات نمایی (مثل تاخیر انتقالی) نمی توان از معیار روت و امثال ذلک استفاده کرد، مگر اینکه با تقریب Pade جملات مربوطه را به چند جمله‌ای تبدیل کنیم.

مثال: دینامیک یک سیستم به شکل زیر است. با استفاده از معیار روت، پایداری را تعیین کنید.

$$G(s) = \frac{b_0 s^2 + b_1}{s^4 + 3s^3 + 5s^2 + 4s + 2}$$

حل: معادله مشخصه پایداری: $s^4 + 3s^3 + 5s^2 + 4s + 2 = 0$

برای تشکیل جدول یا آرایه روت، به ترتیب زیر عمل می کنیم:

دو سطر اول همیشه از معادله مشخصه بدست می آیند و بقیه سطور محاسباتی هستند. توصیه می شود برای مانتورینگ حل و مدیریت محاسبات میانی، در کنار جدول روت، متناظر با هر سطر از جمله توانی s^i با ترتیب نزولی استفاده کنید، به طوری که بزرگترین توان همان درجه چند جمله ای می باشد:

$$\begin{array}{r} s^4 \quad 1 \quad 5 \quad 2 \\ s^3 \quad 3 \quad 4 \quad 0 \\ s^2 \quad -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{3} \quad -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}}{3} \end{array}$$

چون به سطر s^0 هنوز نرسیده ایم، ادامه می دهیم:

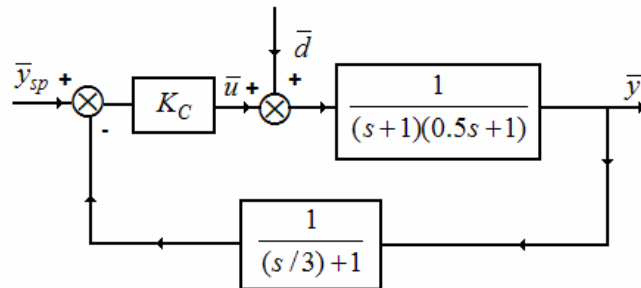
$$\begin{array}{r} s^4 \quad 1 \quad 5 \quad 2 \\ s^3 \quad 3 \quad 4 \quad 0 \\ s^2 \quad 11 \quad 6 \\ s^1 \quad -\frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 11 & 6 \end{vmatrix}}{11} \quad 0 \end{array}$$

و باز هم ادامه می دهیم:

$$\begin{array}{r} s^4 \quad 1 \quad 5 \quad 2 \\ s^3 \quad 3 \quad 4 \quad 0 \\ s^2 \quad 11 \quad 6 \\ s^1 \quad 26 \quad 0 \\ s^0 \quad \frac{26 \times 6}{26} \end{array}$$

بعد از این محاسبات، به ستون اول نگاه می کنیم، هیچ تغییر علامتی دیده نمی شود، پس سیستم پایدار است.

مثال: سیستم فیدبک زیر را در نظر بگیرید، حد K_C (کنترلر تناسبی) را برای اینکه سیستم مدار بسته پایدار بماند، تعیین کنید.



محاسبه معادله مشخصه:

$$\frac{\bar{y}}{\bar{y}_{sp}} = \frac{\frac{K_C}{(s+1)(0.5s+1)}}{1 + \frac{K_C}{(s+1)(0.5s+1)(s/3+1)}} \Rightarrow \text{characteristic equation: } 1 + \frac{K_C}{(s+1)(0.5s+1)(s/3+1)} = 0$$

در نتیجه معادله مشخصه به شکل زیر محاسبه می شود:

$$(s+1)(0.5s+1)((s/3)+1)+K_C=0 \Rightarrow s^3+6s^2+11s+6(1+K_C)=0$$

برای سهولت، تعریف زیر را می‌پذیریم:

$$K \triangleq 6(1+K_C) \Rightarrow s^3+6s^2+11s+K=0$$

تشکیل جدول روت:

$$\begin{array}{r|rr} s^3 & 1 & 11 \\ s^2 & 6 & k \\ s^1 & \frac{66-K}{6} & 0 \\ s^0 & K & \end{array} \Rightarrow \text{Stability Criteria: } \begin{cases} \frac{66-K}{6} > 0 \\ K > 0 \end{cases} \Rightarrow K_C > -1, K_C < 10$$

اولین نکته (یعنی $K_C > -1$) بدیهیست، چون خودمان فرض کردیم که $K_C > 0$ ، پس حد بالای پایداری همان مقدار 10 می‌باشد.

حالات خاص در آزمون روت

۱- اگر یک عنصر ستون اول صفر شود ولی بقیه عناصر آن سطر صفر نباشند
برای حل، بجای صفر، یک عدد مثبت نزدیک به صفر مثل δ در نظر بگیرید و روش را ادامه دهید.

مثال: چندجمله‌ای $s^3+2s^2+s+2=0$ را در نظر بگیرید و آزمون روت را امتحان کنید.

آرایه ضریب به شکل زیر است:

$$\begin{array}{r|rr} s^3 & 1 & 1 \\ s^2 & 2 & 2 \\ s^1 & 0 \approx \delta & 0 \\ s^0 & \frac{2 \times \delta}{\delta} = 2 & \end{array}$$

در نتیجه، سیستم (چندجمله‌ای) پایدارست.

نکته: اگر علامت عنصر بالاتر، با علامت عنصر پائین تر از عنصر δ (عنصر صفر) یکی بود، بدین معنیست که به ریشه صفر (قسمت حقیقی صفر) رسیده‌ایم، یعنی یک جفت ریشه مزدوج مختلط روی محور موهومی داریم.
نکته: برای محاسبه مقدار ریشه، یک روش این است که در معادله (چندجمله‌ای) مقدار zw بگذاریم و مقدار w را محاسبه کنیم:

$$(zw)^3 + 2(zw)^2 + (zw) + 2 \equiv 0 + 0j$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2w^2 + 2 \equiv 0 \\ -w^3 + w \equiv 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w = \pm 1 \\ w = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ریشه های موهومی: } = \pm zw$$

سیستم در آستانه ناپایداری قرار دارد و یا چندجمله‌ای، Hurwitz است.

۲- اگر علامت دو عنصر بالاتر و پائین تر مخالف هم بود، یعنی تغییر علامت داریم:

مثال: چند جمله‌ای $s^3 - 3s + 2 = 0$ را در نظر بگیرید و جدول روت برای آن تشکیل دهید.

! دقت کنید، تست دکارت به همین سادگی می‌گوید ناپایدار است، چون ۳- داریم و بقیه ضرایب مثبت هستند. از طرفی چند جمله‌ای را اگر به صورت ضرب فاکتورهای اول بنویسیم به سادگی متوجه ریشه ناپایدار می‌شویم:

$$s^3 - 3s + 2 = (s-1)^2 \times (s+2) = 0$$

به هر حال، آرایه ضرایب به شکل زیر است:

$$\begin{array}{r} s^3 \\ s^2 \\ s^1 \\ s^0 \end{array} \begin{array}{r} 1 \\ 0 \approx \delta \\ -3 - \frac{2}{\delta} \\ 2 \end{array} \begin{array}{r} -3 \\ 2 \\ 0 \end{array}$$

! نکته: به سطر s^1 نگاه کنید، در حالت حدی وقتی $\delta \rightarrow 0$ باشد، آنگاه ضریب مربوط به سمت ∞ میل می‌کند، با علامت ۱ که مثبت است مقایسه کنید.

چون دو تغییر علامت داریم، لذا دو ریشه ناپایدار (ریشه RHP) تکراری داریم. این نکته در بازآرایی چند جمله‌ای که ریشه $s = +1$ را به صورت فاکتوریزه نوشته‌ایم پیداست.

۳- اگر عناصر (ضرایب) یک سطر همگی صفر شدند، به مفهوم این است که ریشه‌های هم اندازه داریم که بطور شعاعی در صفحه مختلط قرار گرفته‌اند. بطور مثال دو ریشه حقیقی مساوی ولی مختلف علامه یا دو ریشه مختلف مزدوج محض. در چنین حالاتی برای ادامه روش (محاسبه بقیه ضرایب سطور دیگر)، از چند جمله‌ای مُعین (Auxiliary polynomial) استفاده می‌کنیم. روش بدین صورت است که چند جمله‌ای سطر اخیر (قبل از صفر شدن) را تشکیل داده، (چند جمله‌ای مُعین) سپس از آن بر حسب s مشتق می‌گیریم. ضرایب چند جمله‌ای حاصل را جایگزین ضرایب سطری که صفر شده است می‌کنیم.

$$\text{مثال: } s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 = 0$$

! تست دکارت می‌گوید این چند جمله‌ای ناپایدار است، زیرا ضرایب مختلف علامه داریم (دو ضریب ۵۰- و ۲۵- در برابر بقیه ضرایب که مثبت هستند).

تشکیل آرایه روت:

$$\begin{array}{r} s^5 \\ s^4 \\ s^3 \end{array} \begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ 0 \end{array} \begin{array}{r} 24 \\ 48 \\ 0 \end{array} \begin{array}{r} -25 \\ -550 \\ 0 \end{array}$$

چند جمله‌ای معین، چند جمله‌ای سطر s^4 است، یعنی

$$p(s) = 2s^4 + 48s^2 - 50 = 0 \Rightarrow \frac{dp(s)}{ds} = 8s^3 + 96s$$

ضرایب چند جمله‌ای $\frac{dp(s)}{ds}$ (مشتق چند جمله‌ای معین) می‌شود ضرایب سطر s^3 ، پس در ادامه :

s^5	1	24	-25	
s^4	2	48	-50	← Auxiliary Polynomial
s^3	8	96		← Derivative Coeff. of Auxiliary Polynomial
s^2	24	-50		
s^1	112.7	0		
s^0	-50			

مشاهده می‌کنیم که یک تغییر علامت در ستون اول داریم، در نتیجه معادله اصلی یک ریشه با قسمت حقیقی مثبت داشته است. در حقیقت معادله اصلی به این شکل بوده است :

$$s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 = (s+1)(s-1)(s+5j)(s-5j)(s+2) = 0$$

نکته: حل معادله معین همیشه بخشی از ریشه‌ها را بدست می‌دهد :

$$p(s) = 2s^4 + 48s^2 - 50 = 0 \Rightarrow s^2 = 1, s^2 = -25 \Rightarrow s = \pm 1, s = \pm 5j$$

قطبهای غالب یا تقلیل مدل

حال اگر غیر از علامت قطبها، به مقدار آن نیز توجه کنیم، به نکات عملی و جالبی خواهیم رسید. به مثال ساده و انگیزشی زیر توجه کنید. یک سیستم پایدار بادو قطب $p_1 = -1$ و $p_2 = -10$ در نظر بگیرید :

$$G(s) = \frac{A}{(s+1)(s+10)} \quad (A \text{ مقدار ثابتی است})$$

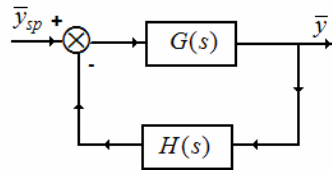
پاسخ سیستم به ورودی‌های استاندارد (نظیر ضربان، پله و شیب) قطعاً دارای جملاتی بشکل e^{-t} و e^{-10t} می‌باشد. فرض کنید یک واحد زمانی از تحریک سیستم (توسط ورودی) گذشته است، جمله e^{-t} معادل 0.37 و جمله e^{-10t} معادل 4.5×10^{-5} مقدار می‌گیرند. جمله اول تقریباً به نسبت 8150 برابر در پاسخ خروجی سهم دارد. به عبارت دیگر جمله‌ای که دارای قطب دورترست (نسبت به مبدأ) خیلی سریع صفر می‌شود. برای سیستم فوق‌الذکر، انگار سیستم درجه دوم مزبور را با یک سیستم درجه اول تقریب زده‌ایم (!) یا رتبه نسبی آنرا یک درجه تقلیل داده‌ایم. به عنوان یک قاعده کلی، اگر نسبت قسمت حقیقی دو قطب بیش از 5 باشد و در نزدیکی آنها صفری در ریشه‌های چند جمله‌ای صورت تابع انتقال وجود نداشته باشد، در آنصورت می‌توان از قطب دورتر در برابر قطب نزدیکتر به مبدأ صرف نظر کرد. به قطب نزدیکتر که دیرتر damp می‌شود می‌گوییم قطب غالب یا فراگیر (Dominant Pole)، چون درگندی و لختی سیستم سهم عمده‌ای دارد. یک کاربرد مهم از این مفهوم، هنگامیست که بخواهیم برخی شاخص‌های عملکرد را در دامنه زمان برای طراحی کنترلر بکار ببریم. اگر کنترلر دارای ساختار معلوم (مثل PID) ولی پارامتریزه باشد، آنگاه مسأله « طراحی کنترلر » مبدل به مسأله « تنظیم کنترلر » (Tuning) می‌شود، یعنی به دنبال مقادیر مناسبی از پارامترهای کنترلر هستیم تا بتوانیم شاخص عملکرد مطلوب طراحی (مدار بسته) را تأمین کنیم. به طور مثال فرض کنید یک فرآیند فیزیکوشیمیایی دارای رتبه نسبی 3، با یک کنترلر PI، تحت کنترل سروو (تغییر در مقدار مقرر) می‌باشد. دینامیک مدار بسته، قطعاً درجه سوم یا بیشتر است. از طرفی برای اینکه سرعت پاسخ مدار بسته بیشتر از مدار باز باشد، K_C کنترلر نسبتاً بزرگ اختیار می‌شود. لذا، عموماً یک جفت از قطبهای مدار بسته، در صورتی که حتی در K_C نزدیک به صفر

روی محور حقیقی بوده باشند، سریعاً به شاخه‌های مختلط رفته و بصورت مختلط مزدوج ظاهر می‌شوند، یعنی جواب دارای جملات سینوسی بوده و به عبارت دیگر پاسخ نوسانی (میرا شونده) خواهد بود. در عمل نیز غالباً به همین شکل است، یعنی پاسخ خروجی اعم از تغییر در مقدار مقرر یا تغییر در Load معمولاً نوسانی می‌باشد ولی زمان نشست آن نسبت به مدار باز بسیار کمتر است (اصلاً علت وجودی کنترلر در بسیاری از سیستم‌ها نیز همین است). بهر حال، طبیعی است که یک شاخص عملکرد ساده، زمان نشست باشد یا برای حفظ قیود سیستم، باند روی اورشوت بخواهیم با زمان اوج کمتر از فلان مقدار باشد با نسبت فروکش حداکثر اینقدر باشد. تمامی موارد اخیرالذکر (شاخص‌های عملکرد) برای اپراتور (یا تکنسین) قابل فهم است ولی اشکال آکادمیک دارد و آن اینکه این اصطلاحات مختص سیستم‌های درجه دوم می‌باشد (!). لذا اگر سیستم مدار بسته درجه دوم بود، آنگاه می‌توانستیم تمامی شاخص‌های اخیرالذکر را به مسأله محاسبه τ (دوره تناوب) و ξ (ضریب میرایی) تبدیل کنیم. یک تقریب مهندسی خوب برای این کار، تقلیل سیستم به درجه دوم به صورت محاسبه دو قطب غالب مزدوج مختلط می‌باشد.

آنالیز خطای ماندگار

هر سیستم فیزیکی ذاتاً دارای خطای ماندگار بسته به نوع ورودی برای تحریک آن خواهد بود. یک سیستم ممکن است در پاسخ به تغییر پله در ورودی آن دارای هیچ خطای ماندگاری (steady state) نباشد ولی در پاسخ به تغییر شیب مقداری خطا داشته باشد. نوع و مقدار خطای ماندگار هر سیستم مدار بسته بستگی به نوع و ساختار مدار باز آن دارد.

تقسیم‌بندی سیستم‌ها - سیستم‌های کنترل را به وجه اینکه چه نوع سیگنال‌هایی را می‌توانند تعقیب کنند، دسته‌بندی می‌کنند، سیستم مدار بسته زیر را در نظر بگیرید و فرض کنید تابع مدار باز به شکل زیر است:



$$G(s)H(s) = K \frac{(b_0s+1)(b_1s+1)\dots(b_ms+1)}{s^N(a_0s+1)(a_1s+1)\dots(a_ns+1)}$$

به طوریکه سیستم دارای N ریشه تکراری (قطب تکراری) در مبدأ می‌باشد (وجود جمله s^N). تقسیم‌بندی مورد نظر روی درجه تکرار انتگرال‌گیر مدار باز می‌باشد. یعنی اگر $N=0$ باشد آنگاه سیستم را از نوع صفر می‌نامیم و اگر $N=1$ باشد، سیستم را از نوع 1 می‌نامیم و قس علیهذا. دقت شود وجود انتگرال‌گیر باعث دقت عملکرد می‌شود، یعنی وجود $1/s$ در مدار باز که می‌تواند بخاطر خود فرآیند بوده باشد یا کنترلر PI، باعث حذف آفست برای تغییر در پله (چه مقدار مقرر و چه اغتشاش) می‌شود ولی اگر تغییر بصورت شیب باشد، دارای خطای ماندگار تغییر خواهیم بود. در صورتی که انتگرال‌گیر دوبله (یعنی $N=2$) داشته باشیم، آنگاه خطای ماندگار در پاسخ تغییر در شیب نداریم ولی برای ورودی سهمی داریم، ...

انواع خطای ماندگار - در سیستم پیش گفته شده، رابطه مدار بسته و همچنین تغییرات خطا به شکل زیر هستند:

$$\frac{\bar{y}}{\bar{y}_{sp}} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \Rightarrow \frac{e(s)}{\bar{y}_{sp}(s)} = 1 - \frac{y(s)H(s)}{y_{sp}(s)} = \frac{1}{1+G(s)H(s)} \Rightarrow$$

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} se(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{s\bar{y}_{sp}(s)}{1+G(s)H(s)}$$

ثابت خطای ماندگار پله، K_P (static Position error constant): خطای ماندگار برای وقتی که ورودی بصورت پله تغییر کند، یعنی: $\bar{y}_{sp} = 1/s$

$$e_{ss} = \frac{1}{1+G(0)H(0)}$$

اگر K_P را بصورت بهره یکنواخت مدار باز تعریف کنیم، یعنی

$$K_P \triangleq G(0)H(0) \Rightarrow e_{ss} = \frac{1}{1+K_P}$$

یعنی خطای ماندگار مدار بسته با بهره یکنواخت مدار باز به شکل بالا رابطه دارد. حال می‌خواهیم بدانیم برای انواع سیستم‌های مدار باز خطای ماندگار چه مقدار می‌شود:

$$\text{برای سیستم‌های type 0} \quad K_P = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K(b_0s+1)\cdots(b_ms+1)}{(a_0s+1)\cdots(a_ns+1)} = K \Rightarrow e_{ss} = \frac{1}{1+K}$$

$$\text{برای سیستم‌های type 1 و بالاتر (} N \geq 1 \text{)} \quad K_P = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K(b_0s+1)\cdots(b_ms+1)}{s^N(a_0s+1)\cdots(a_ns+1)} = \infty \Rightarrow e_{ss} = 0$$

با توجه به آنالیز بالا، می‌توان گفت اگر در شاخص عملکرد طراحی کنترلر، هدف، خطای ماندگار صفر (آفست صفر) برای تغییر در پله می‌باشد، باید در مسیر فرورود حداقل یک انتگرال‌گیر داشته باشیم.

ثابت خطای ماندگار شیب، K_V (static Velocity error constant): خطای ماندگار برای وقتی که ورودی بصورت شیب واحد تغییر کند:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1+G(s)H(s)} \times \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s(1+G(s)H(s))}$$

اگر K_V را بصورت زیر تعریف کنیم، یعنی

$$K_V \triangleq \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s)$$

آنگاه

$$\text{برای سیستم‌های type 0} \quad K_V = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sK(b_0s+1)\cdots(b_ms+1)}{(a_0s+1)\cdots(a_ns+1)} = 0 \Rightarrow e_{ss} = \frac{1}{K_V} = \infty$$

$$\text{برای سیستم‌های type 1} \quad K_V = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sK(b_0s+1)\cdots(b_ms+1)}{s(a_0s+1)\cdots(a_ns+1)} = K \Rightarrow e_{ss} = \frac{1}{K_V} = \frac{1}{K}$$

$$\text{برای سیستم‌های type 2 و بالاتر (} N \geq 2 \text{)} \quad K_V = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sK(b_0s+1)\cdots(b_ms+1)}{s^N(a_0s+1)\cdots(a_ns+1)} = \infty \Rightarrow e_{ss} = \frac{1}{K_V} = 0$$

همانطور که معلوم است دقت عملکرد در تضاد با پایداری است، یعنی اضافه کردن انتگرال‌گیر به خودی خود خوب نیست، بلکه بستگی به شاخص عملکرد دارد. یعنی اگر ورودی به سیستم نوعاً بصورت شیب است و می‌خواهیم خطای ماندگار نداشته باشیم، آنگاه باید در مسیر فور وارد لااقل دو انتگرال‌گیر داشته باشیم.

ثابت خطای ماندگار سهموی، K_A (static Acceleration error constant): خطای ماندگار برای وقتی که ورودی

بصورت سهمی $(\bar{y}_{sp}(t) = t^2/2)$ باشد:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1+G(s)H(s)} \times \frac{1}{s^3} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2(1+G(s)H(s))}$$

با جایگزینی و بطریق مشابه، برای انواع سیستم‌ها، می‌توان مقادیر e_{ss} را بدست آورد. مقادیر خطای ماندگار برای انواع سیستم‌ها و انواع ورودی‌ها بصورت رابطه‌مندی با بهره‌یکنواخت مدار باز در جدول زیر بطور خلاصه آمده است:

	Step Input $\bar{y}_{sp}(t) = 1$	Ramp Input $\bar{y}_{sp}(t) = t$	Acceleration Input $\bar{y}_{sp}(t) = t^2/2$
سیستم‌های type 0	$\frac{1}{1+K}$	∞	∞
سیستم‌های type 1	0	$\frac{1}{K}$	∞
سیستم‌های type 2	0	0	$\frac{1}{K}$

جلسه یازدهم: مکان هندسی ریشه‌ها (Root locus)

مقدمه - یکی از ابزار کلاسیک طراحی کنترلر، روش گرافیکی مکان هندسی ریشه‌ها می‌باشد. همان‌طور که می‌دانید برای سیستم‌های خطی مهم‌ترین مشخصه پایداری (دینامیکی) یک سیستم، محل قطب است، لذا اگر قطبهای مدار بسته به نحوی پارامتریزه شوند، آنگاه می‌توان روی سرعت و (عملکرد) و پایداری سیستم قضاوت نمود. با استفاده روش مکان هندسی ریشه‌ها، می‌توان از روی قطب‌های (و صفرهای) مدار باز و پارامترهای کنترلر، در درجه اول روش پایداری (به‌طور کمی) و سپس عملکرد سیستم مدار بسته به‌طور کیفی بحث نمود. به‌عبارت خلاصه، قطب‌های مدار بسته بر حسب قطب‌های مدار باز پارامتریزه می‌شوند. نکات زیر از نظر کاربرد این روش حائز اهمیت است.

۱- دینامیک‌های مدار بسته و مدار باز باید به‌صورت توابع گویا (rational) و چند جمله‌ای از s نمایش داده شوند. لذا در صورت وجود تأخیر انتقالی ($e^{-T_d s}$) باید از تقریب چند جمله‌ای آن استفاده کرد.

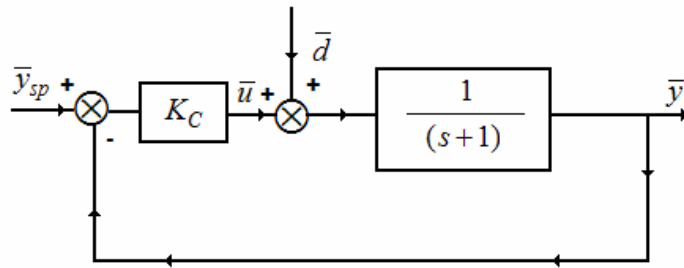
۲- معمولاً کنترلر را تک پارامتری فرض می‌کنند و برای پارامترهای بیشتر، به‌ازای تغییرات هر پارامتر یک مکان رسم می‌شود.

۳- ریشه‌ها به‌صورت کلی یعنی در فضای کمپلکس در نظر گرفته می‌شوند و چون نمایش دینامیک‌ها، به‌صورت چند جمله‌ای از s با ضرایب حقیقی می‌باشند، لذا، ریشه‌های کمپلکس به‌صورت زوج مزدوج ظاهر شده و در نتیجه مکان ریشه‌ها، نسبت به محور افقی (محور حقیقی) متقارن است.

۴- وجود ریشه‌های با قسمت حقیقی منفی، حاکی از پایداری نامی سیستم می‌باشد، ریشه‌های روی محور کمپلکس (محور عمودی) سیستم را در آستانه ناپایداری قرار داده و ریشه‌های سمت راست صفحه کمپلکس، منجر به ناپایداری سیستم می‌شود.

۵- از آنجائیکه روش گرافیکی است، لذا برای رسم دقیق آن باید از وسایل مخصوص (Spirule) یا نرم‌افزارهای ویژه (نظیر MATLAB- Control Toolbox) استفاده کرد. در صورت رسم دستی، فقط نقاط مهم (نقاط جدایی، محل تقاطع با محورها، ...) و شکل کلی (وجود شاخه‌ها و مجانبها ...) مد نظر است.

مثال انگیزشی ۱: سیستم زیر را در نظر بگیرید:



یک فرآیند درجه اول که با یک کنترلر تناسبی ($K_C > 0$)، کنترل (تغییر در مقدار مقرر) می‌شود. می‌خواهیم بدانیم به‌ازای چه مقادیری از K_C ، سیستم مدار بسته پایدار می‌باشد و در صورت پایداری، عملکرد آن با انتخاب چه مقادیری از K_C ، بهترین است. حداکثر تغییر در u بازای تغییر پله در y_{sp} ، مقدار 1 می‌باشد.

$$\frac{\bar{y}}{\bar{y}_{sp}} = \frac{\frac{K_C}{s+1}}{1 + \frac{K_C}{s+1}} = \frac{K_C}{s+1+K_C} = \frac{\left(\frac{K_C}{K_C+1}\right)}{\left(\frac{1}{K_C+1}\right)s+1}$$

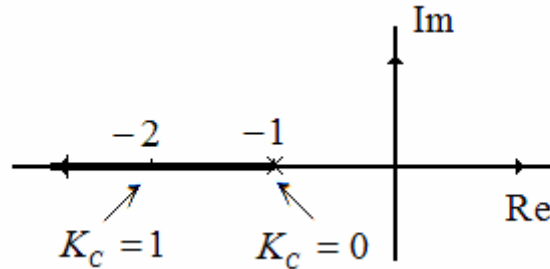
تابع مدار بسته:

پایداری (دینامیک) سیستم با مخرج تابع تبدیل رابطه مستقیم دارد، لذا ریشه‌های مخرج، قطبهای مدار بسته می‌باشند:

$$s + (1 + K_C) = 0 \rightarrow \text{Closed-loop Pole}(s) = -(1 + K_C)$$

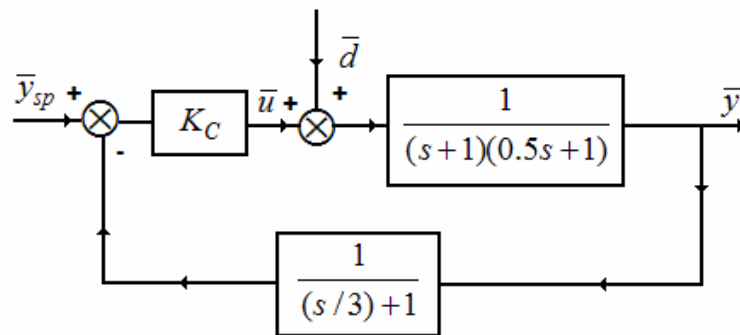
لذا در صورت هر مقدار از K_C ، سیستم پایدار است. چون تنها قطب سیستم (مدار بسته)، همیشه منفی است.

مکان هندسی ریشه‌ها، محور حقیقی است که از -1 به سمت چپ است:



به نمایش مدار بسته دقت کنید، هر چه K_C بزرگتر شده: ثابت زمانی مدار بسته (یعنی $\frac{1}{1+K_C}$) کوچک‌تر شده و لذا پاسخ y به تغییر در y_{sp} ، تندتر و سریع‌تر می‌شود.

مثال انگیزشی (۲): سیستم زیر را در نظر بگیرید، می‌خواهیم مکان (تغییرات) قطبهای مدار بسته یا مکان هندسی (ریشه‌ها) را بر حسب بهره تناسبی کنترلر رسم کنیم:



$$\frac{\bar{y}}{\bar{y}_{sp}} = \frac{\frac{2K_C}{(s+1)(s+2)}}{1 + \frac{2K_C \times 3}{(s+1)(s+2)(s+3)}} = \frac{2K_C(s+3)}{(s+1)(s+2)(s+3) + 6K_C}$$

حل: تابع مدار بسته:

برای تعیین قطبهای مدار بسته باید معادله مشخصه زیر را حل کنیم:

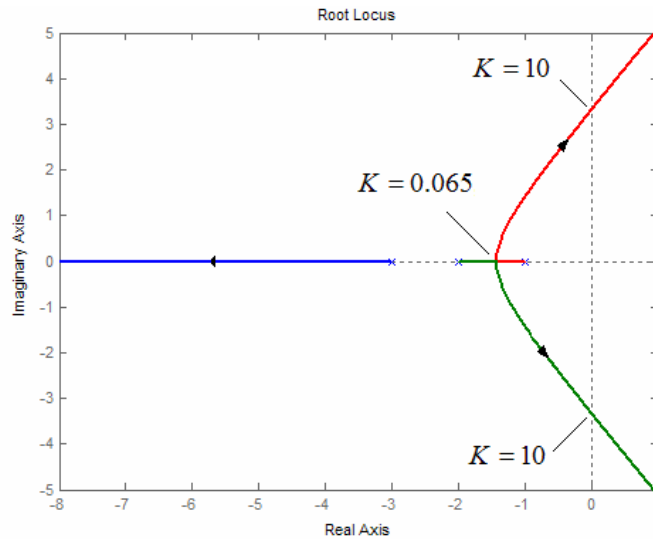
$$(s+1)(s+2)(s+3) + 6K_C = 0 \Rightarrow s^3 + 6s^2 + 11s + 6 + 6K_C = 0$$

همانطور که معلوم است، ریشه‌ها (قطبهای مدار بسته) تابع پارامتر K_C (بهره کنترلر) می‌باشند، لذا، برای چند مقدار از K_C ،

ریشه‌ها را بدست می‌آوریم:

K_C	ریشه اول	ریشه دوم	ریشه سوم	پایداری
0	-3	-2	-1	پایدار
0.038	-3.1	-1.75	-1.15	پایدار
0.263	-3.45	-1.28-0.75j	-1.28+0.75j	پایدار
4.42	-5.1	-0.45-2.5j	-0.45+2.5j	پایدار
10.0	-6.0	0.0-3.32j	0.0+3.32j	در آستانه ناپایداری
16.67	-6.72	0.35-4j	0.35+4j	ناپایدار

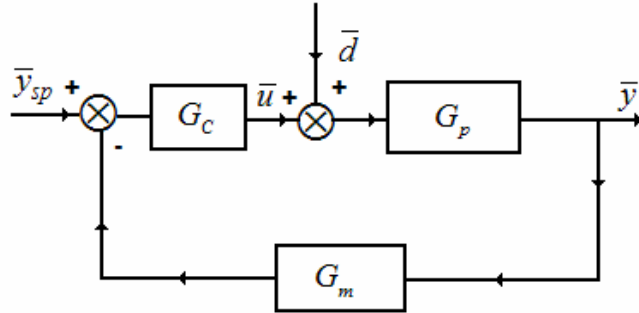
همانطور که معلوم است، چند جمله‌ای معادله مشخصه، همیشه سه ریشه دارد، به طوری که بازای مقادیر مختلف K_C ، یا سه ریشه حقیقی داریم یا یک ریشه حقیقی و دو ریشه کمپلکس مزدوج. تا زمانی که قسمت حقیقی ریشه‌ها (قطبهای مدار بسته) منفی است، سیستم پایدار است و به محض اینکه قسمت حقیقی یکی از ریشه‌ها مثبت شد، سیستم ناپایدار می‌باشد. اگر مقادیر جدول بالا را در صفحه مختصات کمپلکس رسم کنیم، آنگاه به منحنی مزبور (که الزاماً تابع نیست)، می‌گوییم «مکان هندسی ریشه‌ها».



! جهت فلش: زیاد شدن K_C را نمایش می‌دهد.
!علامات ضربدر، محل قطبهای مدار باز است.

روش Evans برای رسم مکان هندسی ریشه‌ها

سیستم کنترل فیدبک (منفی) زیر را در نظر بگیرید :



پاسخ سیستم (خروجی) بوسیله عبارت زیر بیان می‌شود :

$$\bar{y} = \frac{G_c G_p}{1 + G_c G_p G_m} \bar{y}_{sp} + \frac{G_p}{1 + G_c G_p G_m} \bar{d}$$

اگر عامل مخرج، یعنی $1+G$ (بطوریکه $G \triangleq G_c G_p G_m$) را مساوی صفر قرار دهیم، معادله حاصل، معادله مشخصه سیستم مدار بسته نامیده می‌شود. ریشه‌های معادله مشخصه، همان قطبهای مدار بسته بوده و تعیین‌کننده شکل یا خصلت پاسخ \bar{y} به هر تابع محرک (ورودی) خاص مثل \bar{d} یا \bar{y}_{sp} می‌باشد. روش مکان هندسی ریشه‌ها، روشی گرافیکی برای پارامتریزه کردن ریشه‌های معادله $1+G=0$ برحسب پارامترهای تابع مدار باز (یعنی G) می‌باشد. اگر حل معادله مزبور کمی نامأنوس بنظر می‌رسد، شاید به این خاطر باشد که ریشه‌ها، الزاماً حقیقی نیستند، بلکه نوعاً کمپلکس هستند.

گام اول : نوشتن تابع انتقال مدار باز (G) به شکل استاندارد زیر :

$$G = \text{gain} \times \text{rational function} = K \times \frac{N(s)}{D(s)}$$

به‌طوریکه چند جمله‌ای‌های $N(s)$ و $D(s)$ ، به‌صورت ضرب عوامل نوشته می‌شوند یعنی :

$$K = \text{Const.}$$

$$N(s) = (s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)$$

$$D(s) = (s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n) \quad , \quad m \leq n$$

z_i معروف به صفرهای تابع انتقال مدار باز و (ریشه‌های چند جمله‌ای صورت) و p_i قطبهای تابع انتقال مدار باز (ریشه‌های چند جمله‌ای مخرج) هستند.

گام دوم : حل معادله کمپلکس $1+G=0$

$$1+G=1+K \frac{N(s)}{D(s)}=0 \Rightarrow K \frac{N(s^*)}{D(s^*)}=-1$$

معادله با قید بالا می‌گوید، اگر s^* یک ریشه کمپلکس از معادله $1+G=0$ باشد، آنگاه باید عدد (عبارت) کمپلکس

$$K \frac{N(s^*)}{D(s^*)} \text{ مساوی عدد کمپلکس } -1 \text{ شود. اگر هر عدد کمپلکس را در مختصات کارتزین قطبی بنویسیم:}$$

$$\begin{cases} s^* = u + jv & (\text{Cartezian}) \\ s^* = re^{j\theta} & (\text{Polar}) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r = |s^*| = \sqrt{u^2 + v^2} \\ \theta = \angle s^* = \text{tg}^{-1}\left(\frac{v}{u}\right) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} s^* = re^{j\theta} = r(\cos(\theta) + j \sin(\theta)) \\ |s^*| = r \\ \angle s^* = \theta \end{cases}$$

آنگاه عدد -1 را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$-1 = (1)e^{j\pi} = \cos(\pi) + j \sin(\pi) = -1 + 0 \times j$$

پس به طور کلی هر s^* در رابطه $K \frac{N(s^*)}{D(s^*)} = -1$ صدق کند باید

$$\begin{cases} \left| K \frac{N(s^*)}{D(s^*)} \right| = 1 & (\text{Magnitude Rule}) \\ \angle \left[K \frac{N(s^*)}{D(s^*)} \right] = (2k+1)\pi & (\text{Angle Rule}) \end{cases}$$

و با کمی جزئیات:

$$\begin{cases} \left| K \frac{N(s^*)}{D(s^*)} \right| = K \frac{|s^* - z_1| |s^* - z_2| \cdots |s^* - z_m|}{|s^* - p_1| |s^* - p_2| \cdots |s^* - p_n|} = K \frac{\prod_{i=1}^m |s^* - z_i|}{\prod_{i=1}^n |s^* - p_i|} = 1 \\ \angle \left[K \frac{N(s^*)}{D(s^*)} \right] = \left\{ \angle(s^* - z_1) + \angle(s^* - z_2) + \cdots + \angle(s^* - z_m) \right\} - \\ \left\{ \angle(s^* - p_1) + \angle(s^* - p_2) + \cdots + \angle(s^* - p_n) \right\} \\ = \sum_{i=1}^m \angle(s^* - z_i) - \sum_{i=1}^n \angle(s^* - p_i) = (2k+1)\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

گام سوم: انتخاب یک مقدار از K و سپس یک حدس از s^* به طوریکه همزمان در قاعده اندازه و زاویه صدق کند.

قواعد رسم نمودارهای مکان هندسی ریشه‌ها (فیدبک منفی):

چون روش، یک روش گرافیکی است و ذاتاً دارای سعی و خطا می‌باشد (جز در موارد خاص)، لذا باید بتوانیم شکل و مؤلفه‌های کلی مکان را به طور دستی، بدست آوریم. با استفاده از قواعد و خطوط راهنمای زیر می‌توان به سرعت شکل مکان را بدست آورد.

قاعده ۱: تعداد شاخه‌های مکان، معادل تعداد قطبهای مدار باز است.

قاعده ۲: شاخه‌ها از قطبهای مدار باز شروع شده ($K=0$) و در صفرهای مدار باز پایان می‌یابند ($K \rightarrow \infty$). چون تعداد قطبها بیشتر از صفرها یا مساوی آنها می‌باشد، لذا تعداد $n-m$ تا شاخه در صفرهای بی‌نهایت (یا امتداد مجانبها) قرار می‌گیرند.

در صورتی که یک قطب تکرار شده باشد (از درجه q)، آنگاه q شاخه از این قطب شروع می‌شوند. مشابه همین برای صفرهای درجه q نیز برقرار است (مقدار q شاخه به آن می‌رسند).

قاعده ۳: اگر مجموع تعداد قطبها و صفرها در سمت راست نقطه‌ای از محور حقیقی (Real) فرد باشد، آنگاه محور حقیقی بخشی از مکان است، دقت شود قطبها و صفرهای تکراری، به عدد تکرارشان محسوب می‌شوند.

قاعده ۴: مرکز گرانس مجانبها از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\left\{ \begin{aligned} \gamma &= \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{j=1}^m z_j}{n-m} = \frac{\sum(\text{poles}) - \sum(\text{zeros})}{\text{relative order}} \\ \angle \gamma &= (\text{angle with real axis}) = \frac{(2k+1)\pi}{\text{relative order}} \end{aligned} \right.$$

قاعده ۵: نقطه‌ای که در آن دو شاخه روی محور حقیقی به هم می‌رسند و از هم جدا شده (با زوایای $\pm \frac{\pi}{2}$) و تصویری روی محور کمپلکس (Im) دارند را نقطه جدایی گویند:

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{s^* - z_i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{s^* - p_i}$$

دقت شود s^* یک عدد حقیقی و p_i و z_i می‌توانند کمپلکس باشند.

قاعده ۶: از هر قطب مدار باز درجه q ، تعداد q شاخه با زاویه ترک θ شروع می‌شوند:

$$\theta = \frac{1}{q} \left[(2k+1)\pi + \sum_{i=1}^m \angle(p^* - z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(p^* - p_j) \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, q-1$$

به‌طریق مشابه، هر شاخه که به صفر درجه v میل کند، با زاویه زیر است:

$$\theta = \frac{1}{v} \left[(2k+1)\pi + \sum_{i=1}^m \angle(z^* - z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(z^* - p_j) \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, v-1$$

قاعده ۷: محل تقاطع با محور موهومی - از آزمون روت استفاده می‌کنیم:

$$D(s^*) + K \times N(s^*) = 0$$

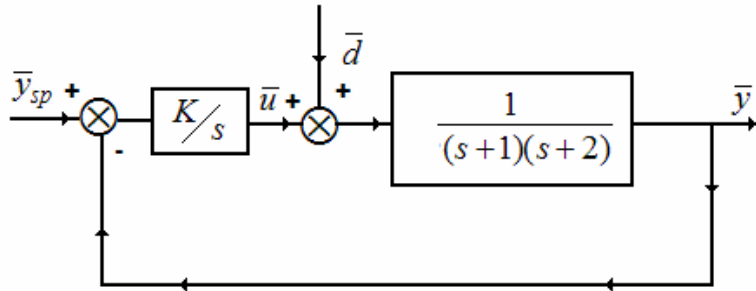
! فایده و نکته: برای وقتی که رتبه نسبی تابع مدار باز (یعنی $n-m$) بزرگتر یا مساوی 2 باشد، آنگاه مجموعه قطبها (ریشه‌ها) مستقل از K بوده، ثابت و حقیقی هستند.

فایده و نکته: در مهندسی شیمی (کنترل فرآیندها) اکثراً، قطبهای مدار باز (SISO) روی محور حقیقی قرار دارند.

در موارد استثناء نظیر سنسورهای فشار یا شیر کنترل‌هایی که دارای دینامیک درجه دوم هستند، قطبهای مختلط نیز دارند.

نکته: فرقیست بین آموزش قدیم (رازآموزی) و نظام آموزش جدید (رازدانی و ریزآموزی)، به‌طوریکه روش Evans یک روش کلاسیک و آئینی و رازآموزی می‌باشد. استفاده از این روش برای رفع تکلیف و پیاده‌سازی روی کامپیوترست. در طرف مقابل، روش خودفتوی است که با همان دانسته‌ها و دانش مهندسی خودمان مکان را رسم کرده یا مشخصه‌های مهم را در می‌آوریم. به‌طور مثال، برای نقطه جدایی، کفایست کمی تأمل کنیم، در آنجا ریشه‌ها تکراری می‌باشد و لذا با ابزار ریاضی مربوطه یعنی قاعده اندازه، قاعده زاویه، تست روت و چند تالم می‌توان مسئله را حل کرد.

مثال: سیستم زیر (فرآیند بعلاوه کنترلر I) را در نظر بگیرید، می‌خواهیم برخلاف مثال قبلی که قطبهای مدار بسته را به صورت جدولی نمایش دادیم، حالا بطور گرافیکی (انتقال اطلاعات بسیار سریع‌تر) نمایش دهیم. بعد از رسم، قطبهای غالب را دو ریشه مختلط بگیرید و K برای وقتی که ξ معادل 0.5 می‌شود را به دو روش گرافیکی و محاسباتی (عددی) محاسبه کنید. دقت شود که $\xi = 0.5$ معادل اورشوت تقریباً 16 درصدی می‌باشد.



قطبهای مدار باز را با علامت \times روی صفحه مختصات کمپلکس مشخص کنید و صفرها را با علامت \circ . (در این مثال، صفر مدار باز نداریم)، صفر مدار بسته چطور؟

$$G_{cl}(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)} = \frac{K}{s(s+1)(s+2) + K}$$

مدار بسته هم صفر ندارد:

قاعده ۱: چون سه قطب مدار باز داریم، پس مکان (قطبهای مدار بسته) مرکب از سه شاخه است.
 قاعده ۳: بخشی از مکان روی محور حقیقی است و مشخصاً بین -1 و صفر و نیز از -2 تا $-\infty$ جزء مکان است.
 روش بی‌قاعدگی (خودفتوی): می‌خواهیم ببینیم چه مکانهایی از محور حقیقی، جزء مکان قطبهای مدار بسته است:

$$1 + G_{ol}(s) = 0 \rightarrow G_{ol}(s) = -1 \rightarrow \angle G_{ol} = \angle \left[\frac{K}{s(s+1)(s+2)} \right] = -\angle s - \angle(s+1) - \angle(s+2)$$

باید مضارب فرد π باشد. پس یک نقطه تستی روی محور حقیقی انتخاب می‌کنیم و از تست (قاعده) زاویه بالا استفاده می‌کنیم. به‌طور مثال نقطه $s^* = +2$ را انتخاب می‌کنیم:

$$\angle s^* = \angle(+2) = 0, \angle(s^*+1) = \angle(+2+1) = 0, \angle(s^*+2) = \angle(+2+2) = 0$$

می‌بینیم مضرب فردی از π نیست، پس می‌توان ادعا کرد که نه تنها نقطه $s^* = +2$ جزء مکان نیست، بلکه تمام قسمت مثبت محور حقیقی نیز جزء مکان نیست. به‌هرحال همین‌طور ادامه می‌دهیم و در قسمت منفی محور حقیقی یک نقطه تستی بین 0 و -1 در نظر می‌گیریم و تست زاویه اخیرالذکر را برقرار می‌کنیم و همین‌طور ادامه می‌دهیم تا بقیه محور حقیقی اسکن و تست شود. دقت کنید، تکه‌های مهم محور حقیقی (milestones)، همان‌هایی هستند که بین قطب‌ها و صفرهای مدار باز قرار دارند، فافهم!

قاعده ۴: رتبه نسبی تابع انتقال مدار باز 3 ($n-m=$) است، یعنی سه قطب حیران داریم که صفرشان در ∞ است، پس سه مجانب داریم، با مرکز گرانش:

$$\left\{ \begin{aligned} \gamma &= \frac{\sum(\text{poles}) - \sum(\text{zeros})}{\text{relative order}} = \frac{(-0-1-2)-0}{3} = -1 \\ \angle \gamma &= (\text{angle with real axis}) = \frac{(2k+1)\pi}{\text{relative order}} = \pi/3, 3\pi/3, 5\pi/3 \end{aligned} \right.$$

روش بی‌قاعد (خودفتوی): می‌خواهیم بدانیم برای نقاط دور s (یعنی $s \rightarrow \infty$) معادله مشخصه چه قیافه‌ای می‌شود:

$$1 + G_{ol}(s) = 0 \Rightarrow \lim_{s \rightarrow \infty} (1 + G_{ol}(s)) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \right) = 0 \rightarrow \lim_{s \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{K}{s^3} \right) = 0$$

چون می‌خواهیم مجانبها را بدست آوریم، پس حد نمی‌گیریم.

$$-3 \leq s = (2k+1)\pi, k = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow \angle s = \text{angel of asymptotes} = \pm \frac{(2k+1)\pi}{3}$$

محاسبه مرکز گرانش (یعنی مجانبها محور حقیقی را در کجا قطع می‌کنند؟):

برای s بزرگ: $s(s+1)(s+2) + K = 0 \Rightarrow s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0 \Rightarrow$ معادله مشخصه

$$s^3 + 3s^2 + 2s + (s+1)(-0) = 0 \Rightarrow (s+1)^3 = 0 \Rightarrow (s^* = \sigma) \Rightarrow (\sigma+1)^3 = 0 \Rightarrow \sigma = -1$$

قاعده ۵: نقطه جدایی (break-away point): قطعاً بین صفر و -1 است:

$$0 = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} \Rightarrow \frac{(s+1)(s+2) + s(s+2) + s(s+1)}{s(s+1)(s+2)} = 0 \Rightarrow$$

$$(s^2 + 3s + 2) + (s^2 + 2s) + (s^2 + s) = 0 \Rightarrow 3s^2 + 6s + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$s_{1,2}^* = \frac{-3 \pm \sqrt{9-6}}{3} = \begin{cases} \frac{-3-\sqrt{3}}{3} = -1.577, \text{unreasonable} \\ \frac{-3+\sqrt{3}}{3} = -0.423 \end{cases}$$

روش بی‌قاعد (خودفتوی): محل جدایی جاییست که دو شاخه به هم می‌رسند (دو ریشه به هم می‌رسند)، یعنی محل برخورد

همزمان روی دو شاخه است، یعنی ریشه تکراری، یعنی مقداری از K که منجر به ریشه تکراری حقیقی می‌شود.

(روش ابداعی (استفاده از چند جمله‌ایها)) معادله مشخصه را با این شکل بنویسید:

$$1 + G(s) = 0 \Rightarrow 1 + K \frac{N(s)}{D(s)} = 0 \Rightarrow f(s) = D(s) + KN(s) = 0$$

$$\frac{df(s)}{ds} = 0 \quad \text{می‌توان نشان داد که } f(s) \text{ دارای ریشه تکراری در جاییست که:}$$

اثبات:

$$\left\{ \begin{aligned} f(s) &= (s-s_1)^r (s-s_2) \dots (s-s_n) \\ \text{where } r &\geq 2 \end{aligned} \right. \Rightarrow \text{از طرفین مشتق بگیرید و قرار دهید } s = s_1$$

$$\frac{df(s)}{ds} = r(s-s_1)^{r-1}[(s-s_2)...(s-s_n)] + (s-s_1)^r \frac{d}{ds} \{(s-s_2)...(s-s_n)\} \Rightarrow (\text{let } s = s_1) \Rightarrow \left. \frac{df(s)}{ds} \right|_{s=s_1} = 0$$

... (ادامه)

$$\frac{df(s)}{ds} = D'(s) + KN'(s) = 0 \Rightarrow K = -\frac{D'(s)}{N'(s)} \Rightarrow f(s) = D(s) - \frac{D'(s)}{N'(s)} N(s) = 0$$

کافیست این معادله را بر حسب s حل کنیم.

روش عملی: (روش گفته شده چندین مرحله دارد که سخت است و باید حفظ شود، لذا):

$$\left\{ \begin{array}{l} K = -\frac{D'(s)}{N'(s)} \Rightarrow f(s) = D(s) - \frac{D'(s)}{N'(s)} N(s) = 0 \Rightarrow DN' - D'N = 0 \\ \text{charac. eq.: } D(s) + KN(s) = 0 \Rightarrow K = -\frac{D(s)}{N(s)} \Rightarrow \frac{dK}{ds} = -\frac{D'N - DN'}{N^2} \Rightarrow \frac{dK}{ds} = 0 \text{ (شرط لازم و نه کافی)} \end{array} \right.$$

اگر این را به مثال خودمان بزنیم:

$$s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0 \Rightarrow K = -(s^3 + 3s^2 + 2s) \Rightarrow \frac{dK}{ds} = -(3s^2 + 6s + 2) \Rightarrow s = \begin{cases} -0.423 \\ -1.577 : \text{unacceptable} \end{cases}$$

این مقدار غیر قابل قبول را در معادله مشخصه بگذارید، می بینید $K = -0.385$ می شود، که غیر قابل قبول است، چون $K > 0$ است. ولی برای آن یکی می شود: $K = +0.385$

محل تقاطع با محور موهومی:

روش اول: استفاده از جدول Routh

$$s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

s^3	1	2
s^2	3	K
s^1	$\frac{6-K}{3}$	0
s^0	K	

if $K = 6 \Rightarrow \text{row } s^1 : 0 \ 0 \Rightarrow \text{Auxiliary polynomial} \Rightarrow$

$$p(s) = 3s^2 + 0s + K + 0 = 3s^2 + K = 3s^2 + 6 = 0 \Rightarrow s = \pm j\sqrt{2}$$

روش دوم: در محل تقاطع با محور موهومی، ریشه باین شکل است $s^* = \pm jw$

جاگذاری در معادله:

$$(jw)^3 + 3(jw)^2 + 2(jw) + K = 0 \Rightarrow (K - 3w^2) + j(2w - 3w^2) \equiv 0 + 0j \Rightarrow$$

$$w = \pm\sqrt{2} \text{ for } K = 6 \text{ or } w = 0 \text{ for } K = 0$$

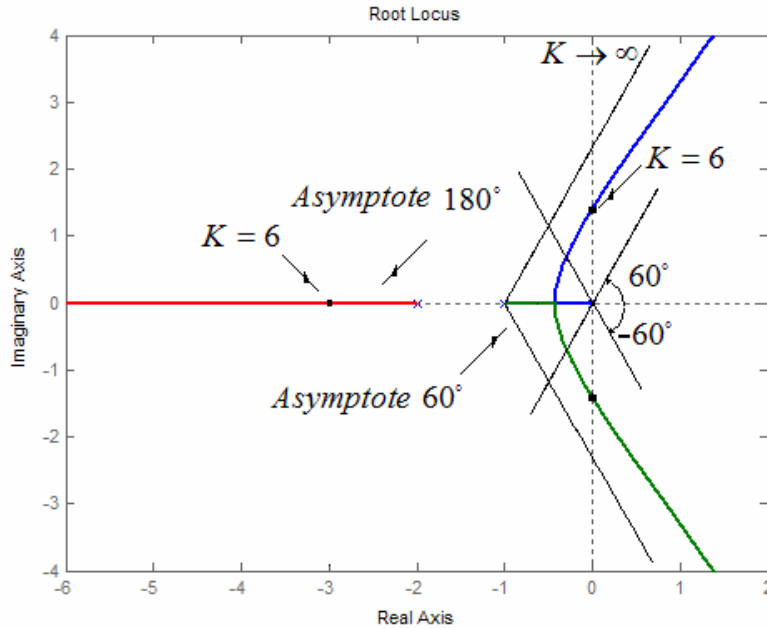
چند نقطه تستی نیز انتخاب کنید، شکل را رسم کنید.

برای محاسبه K (حالت دوقطبی غالب) برای اورشوت 16 درصدی، به شکل زیر عمل می کنیم:

برای محاسبه قطبهای یک سیستم درجه دوم از قبل می دانیم:

$$p_{1,2} = -\frac{\xi}{\tau} \pm \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau} j \equiv r \cos(\theta) + r \sin(\theta) j \Rightarrow \text{tg}(\theta) = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} = 1.732 \Rightarrow \theta = \pm 1.047(\text{rad}) = \pm 60^\circ$$

یعنی برای محاسبه K باید خط (خطوط) $\pm 60^\circ$ را با مکان قطع دهیم (به شکل رجوع کنید).



روش محاسباتی: فرض می‌کنیم نقطه مورد نظر (محل تقاطع خط $\pm 60^\circ$ با مکان) به شکل روبرو باشد: $s^* = \alpha + j\beta$ چون در مکان است پس در معیار زاویه باید صدق کند (در معیار اندازه نمی‌گذاریم، چون K دارد).

$$-\angle(s^*) - \angle(s^* + 1) - \angle(s^* + 2) = -\pi$$

$$s^* = \alpha + j\beta \Rightarrow \begin{cases} s^* + 1 = (\alpha + 1) + j\beta \\ s^* + 2 = (\alpha + 2) + j\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\angle(s^*) = \text{tg}^{-1}(\beta/\alpha) = x \\ -\angle(s^* + 1) = \text{tg}^{-1}(\beta/(\alpha + 1)) = y \\ -\angle(s^* + 2) = \text{tg}^{-1}(\beta/(\alpha + 2)) = z \end{cases}$$

$$\text{Angel Criteria: } \underbrace{\text{tg}^{-1}(\beta/\alpha)}_x + \underbrace{\text{tg}^{-1}(\beta/(\alpha + 1))}_y + \underbrace{\text{tg}^{-1}(\beta/(\alpha + 2))}_z = \pi \Rightarrow \text{tg}(x + y + z) = \text{tg}(\pi) = 0$$

$$\text{tg}(x + y + z) = \frac{\text{tg}(x) + \text{tg}(y) + \text{tg}(z) - \text{tg}(x)\text{tg}(y)\text{tg}(z)}{1 - \text{tg}(x)\text{tg}(y) - \text{tg}(x)\text{tg}(z) - \text{tg}(y)\text{tg}(z)} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha + 1} + \frac{\beta}{\alpha + 2} - \frac{\beta^3}{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)}}{1 - \frac{\beta^2}{\alpha(\alpha + 1)} - \frac{\beta^2}{\alpha(\alpha + 2)} - \frac{\beta^2}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)}} = 0 \Rightarrow 3\alpha^2 + 6\alpha + 2 = \beta^2$$

اگر یک رابطه دیگر بین α و β داشته باشیم، مسأله حل است:

$$\text{tg}^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = 120^\circ \Rightarrow \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = 1.732 \Rightarrow \beta = 1.732\alpha$$

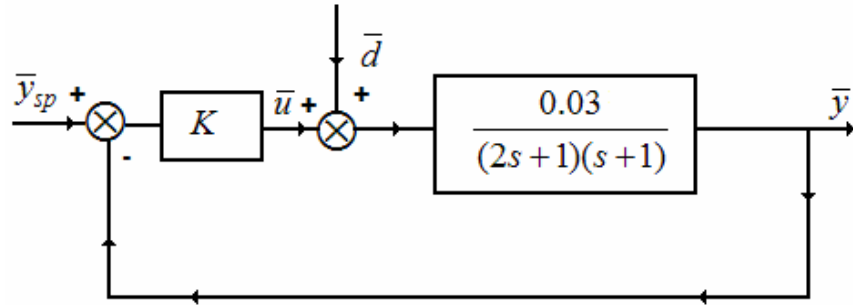
$$s_{1,2}^* = -\frac{1}{3} \pm j \frac{1732}{3000} \text{ با جایگذاری در رابطه بالا، محل‌های تقاطع به دست می‌آیند:}$$

حال برای محاسبه K از معیار اندازه استفاده می‌کنیم:

$$\text{معیار اندازه: } \left| \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \right| = 1 \Rightarrow K = |s^*| |s^* + 1| |s^* + 2| = 1.037$$

کاربرد مکان هندسی ریشه ها در تحلیل و عملکرد سیستم های کنترل

یک سیستم کنترل را در نظر بگیرید که G_c را مرتبا عوض می کنیم (فعلا تاخیر انتقالی در اندازه گیری نداریم).

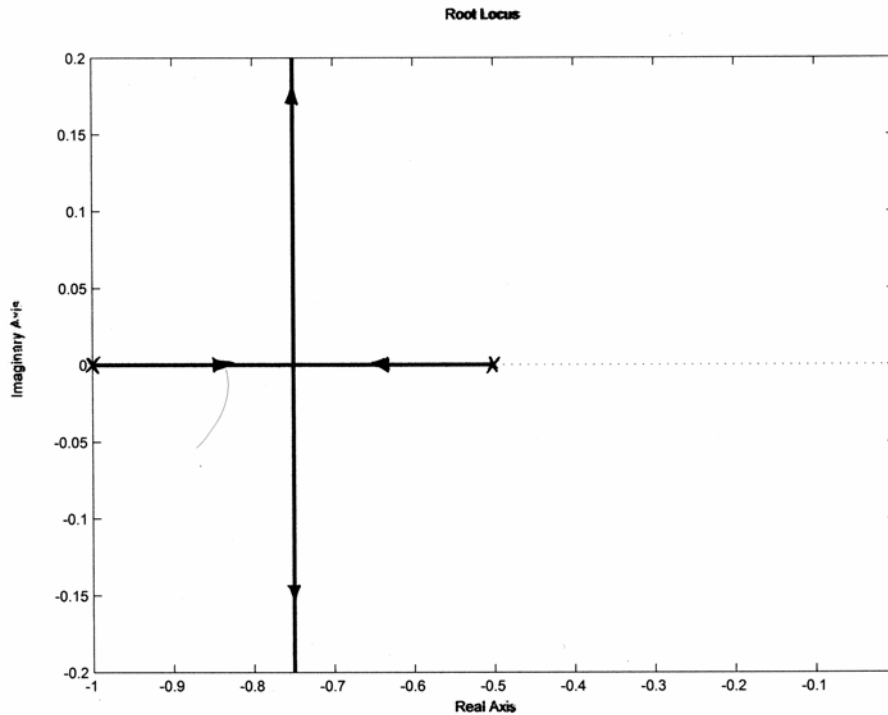


شکل ۱- سیستم مدار بسته مورد بحث.

کنترل تناسبی:

$$G = \frac{0.03K_c}{(2s+1)(s+1)} = \frac{K}{(s+0.5)(s+1)}, \quad K \triangleq \frac{0.03K_c}{2}$$

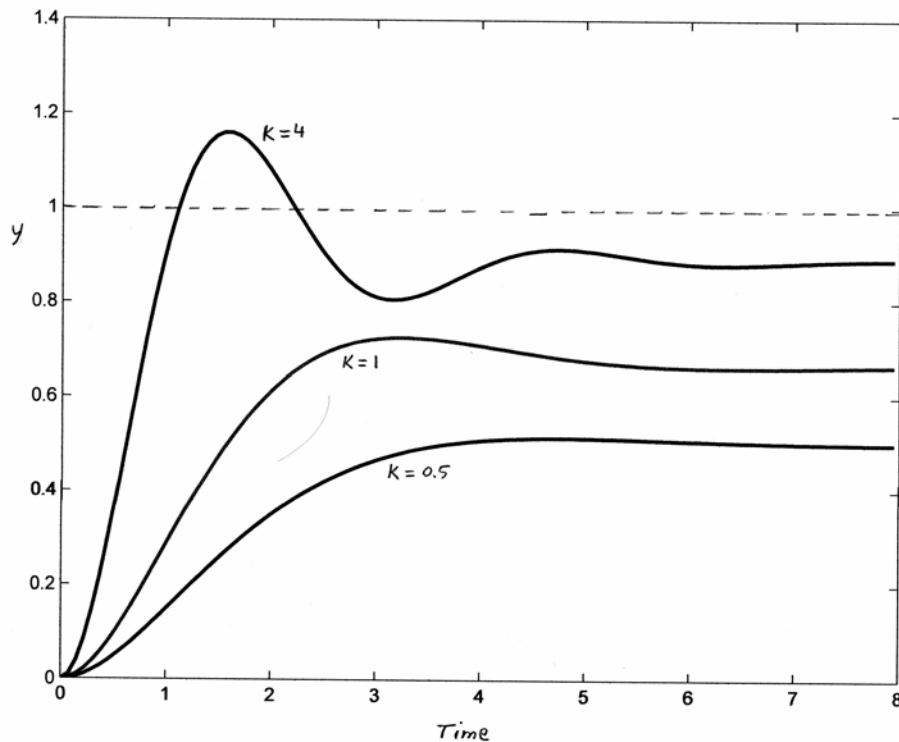
نمودار مکان هندسی ریشه های معادله مشخصه در شکل ۲ نشان داده شده است.



شکل ۲- نمودار مکان هندسی برای مدار بسته شامل کنترل تناسبی.

نکته:

- ۱- در این نمودار فقط دو ریشه وجود دارد (مثال خاص).
- ۲- وجود کنترلر تناسبی هیچ مورد دینامیکی جدیدی با خود نیاورده است.
- ۳- به ازای مقادیر بیشتر K ، این ریشه‌ها مختلط می‌شوند، یعنی پاسخ سیستم از یک K به بعد، نوسانی شده (پاسخ درجه دوم) و اینکه این دوره تناوب τ و میرایی ζ همراه با بهره K کاهش می‌یابند. چون از پاسخ درجه دوم می‌دانیم، هر چه قسمت موهومی بزرگتر شود، سیستم رفتار نوسانی‌تر (یعنی τ و ζ کوچکتر) از خود بروز می‌دهد. به شکل ۳ برای پاسخ زمانی سیستم رجوع کنید.



شکل ۳- پاسخ زمانی مدار بسته شامل کنترلر تناسبی با بهره‌های مختلف.

کنترل تناسبی - انتگرالی:

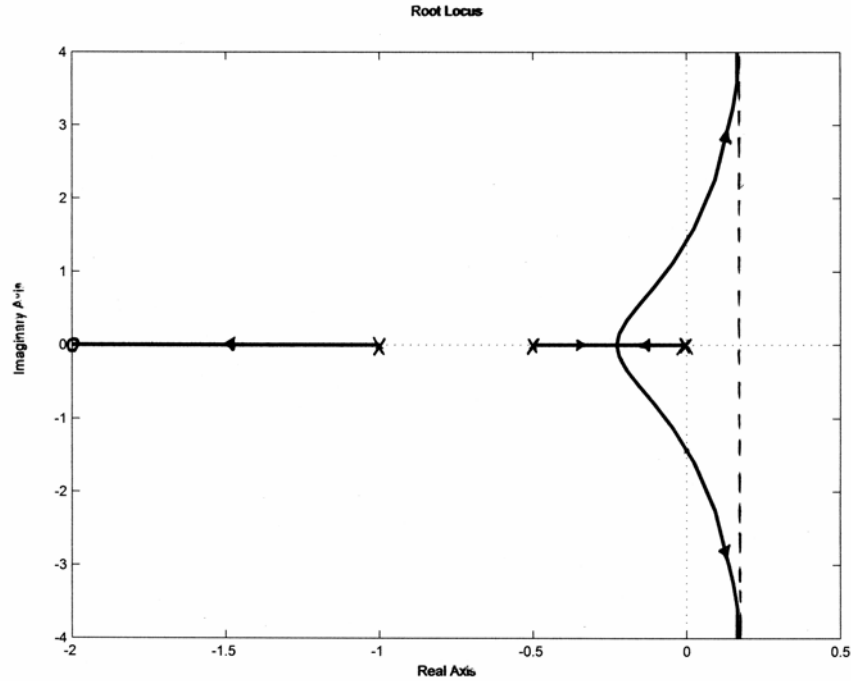
$$G = \frac{0.03K_c}{(2s+1)(s+1)} \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} \right) = \frac{K(s+1/\tau_i)}{s(s+0.5)(s+1)}, \quad K \triangleq \frac{0.03K_c}{2}$$

نکته: کنترلر PI باعث ایجاد مورد های جدید دینامیکی شده است، چون یک صفر و یک قطب (در مبدا) اضافه کرده است.
 نکته: خود فرآیند دارای دو ثابت زمانی ۱ و ۲ و به تعبیر قطب، دارای دو قطب ۰,۵- و ۱- است، می‌خواهیم بدانیم اثر صفری که PI اضافه کرده است، چگونه است؟

۱- صفر مزبور را در منتهی‌الیه سمت چپ همه قطب‌ها قرار می‌دهیم (این کار را با مقدار دهی τ انجام می‌دهیم)، مثلاً

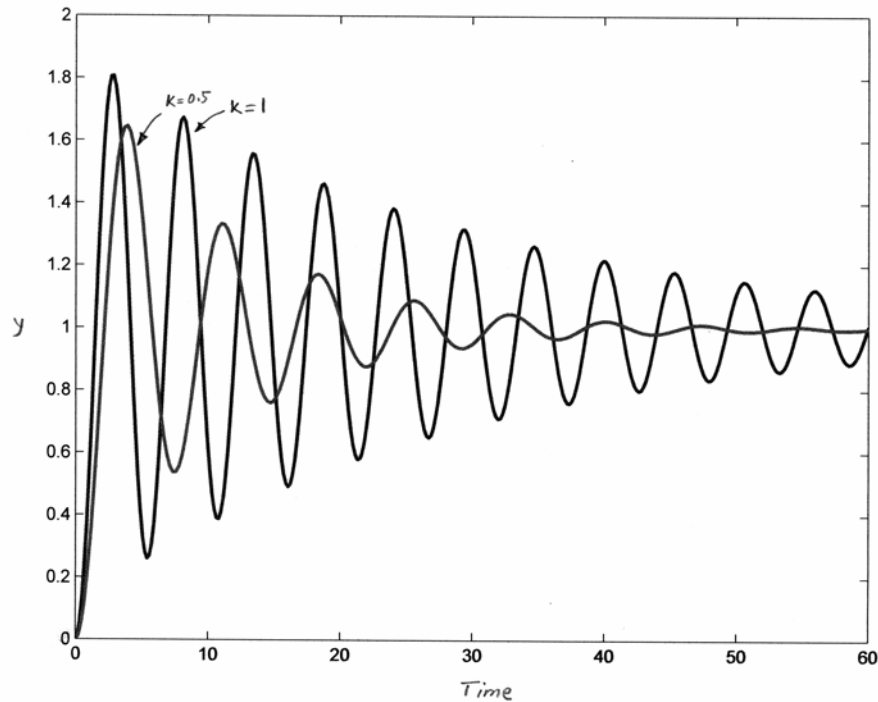
$$\tau_i = 0.5 \rightarrow \text{new zero} = -2$$

مکان هندسی ریشه‌ها برای این حالت (صفر مدار باز یا مدار بسته در -2) در نمودار ۴ آمده است.



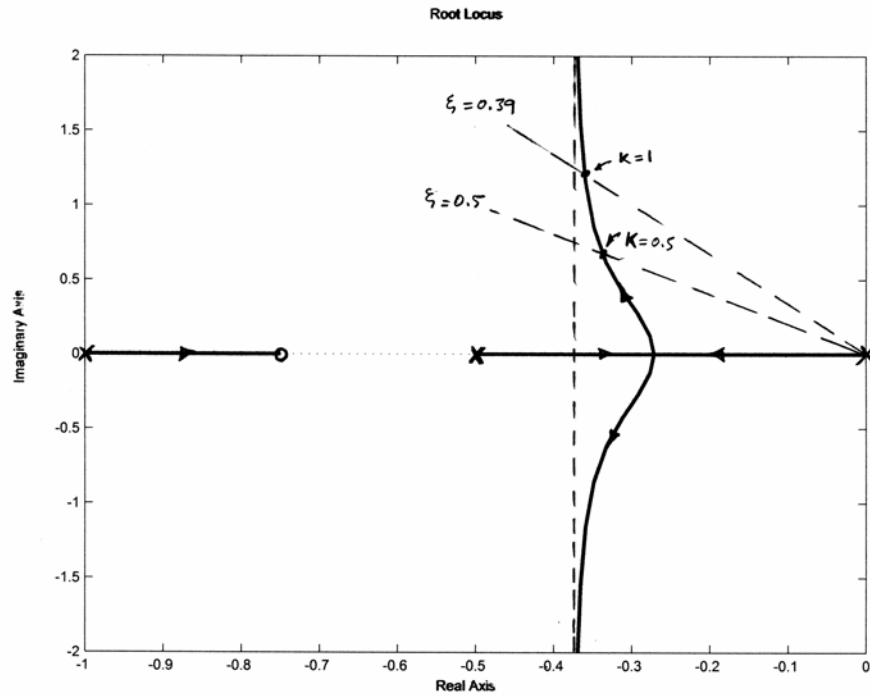
شکل ۴- نمودار مکان هندسی برای مدار بسته شامل کنترل تناسبی-انتهگالی ($\tau_I = 0.5$).

نکته: به نظر می رسد اگر قطب های غالب را روی این دو شاخه مزدوج انتخاب کنیم، باید جواب خیلی میرا باشد (شکل ۵)، در حالی که این طور نیست. چرا؟ جواب: بخاطر اینکه قطب -1 ، خیلی هم دور نیست، یعنی به ازای K معادل 0.5 و 1 ، یعنی آن دو ریشه مختلط خیلی هم غالب نیستند، ...



شکل ۵- پاسخ زمانی مدار بسته شامل کنترل تناسبی-انتهگالی ($\tau_I = 0.5$).

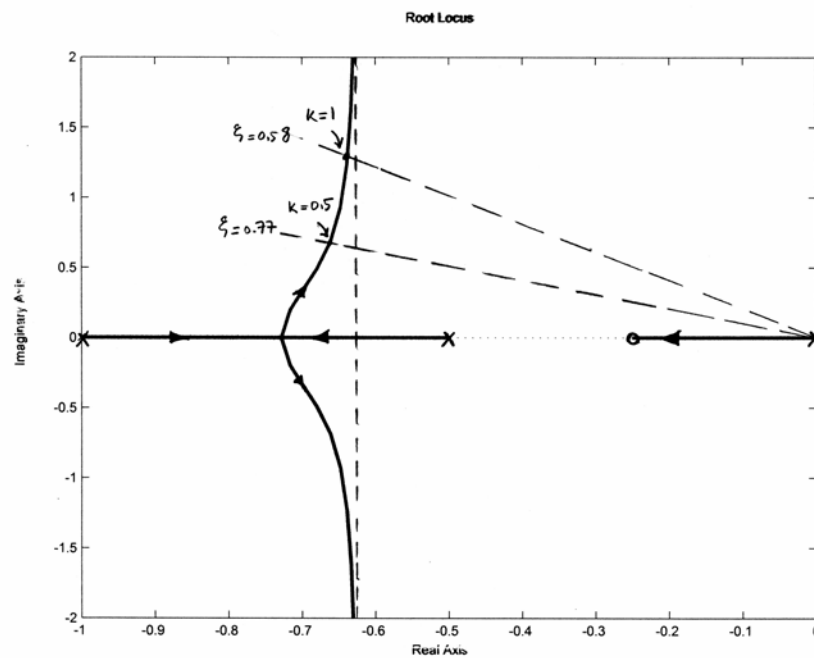
۲- صفر مزبور (اضافه شده) را با عوض کردن τ_I بین دو قطب فرآیند، یعنی ۱- و ۰,۵- قرار می‌دهیم: (شکل ۶)



شکل ۶- نمودار مکان هندسی برای مدار بسته شامل کنترل تناسبی- انتگرالی ($\tau_I = 4/3$).

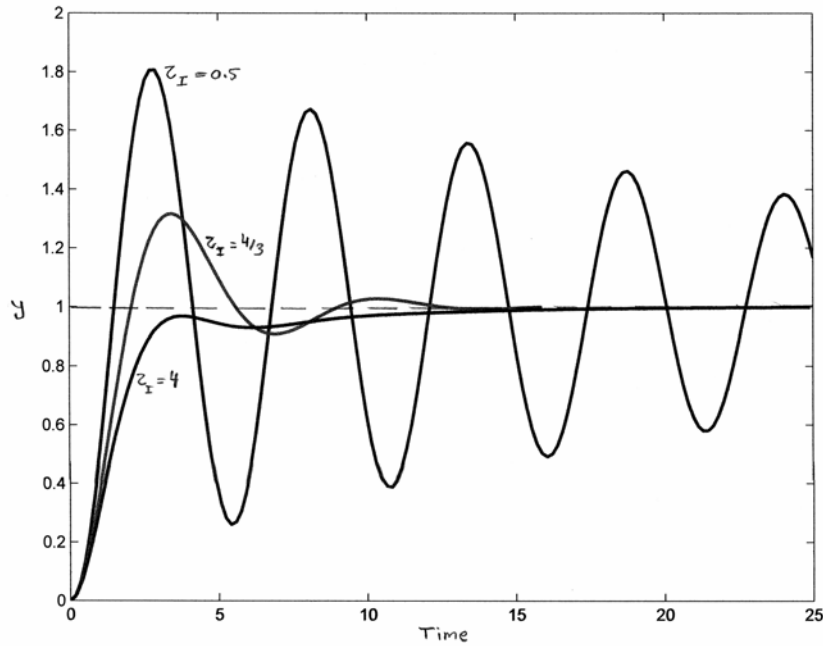
نکته: با افزایش بهره کنترلر سیستم ناپایدار نمی‌شود!!!

۳- صفر مزبور (اضافه شده) را بین دو قطب صفر (مبدا) و قطب ۰,۵- قرار می‌دهیم: (شکل ۷)



شکل ۷- نمودار مکان هندسی برای مدار بسته شامل کنترل تناسبی- انتگرالی ($\tau_I = 4$).

نکته: با افزایش بهره کنترلر، سیستم ناپایدار نمی‌شود، ضمناً باید کمتر نوسانی باشد (به مقادیر ζ_I توجه کنید).
 نتیجه اخلاقی: از نظر پایداری، فقط دو حالت اخیر (یعنی $\tau_I = 4/3$ و $\tau_I = 4$) همیشه پایدار هستند. از نظر عملکردی به شکل ۸ مراجعه و مقایسه کنید.



شکل ۸- پاسخ زمانی مدار بسته شامل کنترل تناسبی-انتهگالی (برای τ_I های مختلف و $K = 1$).

اثر مشتقی (کنترلر PD و PID)

وجود مشتق، یعنی اضافه کردن صفر، یعنی سیستم را به سمت پایداری بردن است. به تعبیر دیگر حد K_C برای ناپایداری را بالا می‌برد. به طور مثال، اگر سیستم در $K_C = 10$ ناپایدار شود، آنگاه اضافه کردن عمل مشتقی، باعث می‌شود سیستم در $K_C = 50$ ، ناپایدار شود.

احتساب تاخیر انتقالی:

تا به حال هر ابزاری که به کار گرفته‌ایم با استفاده از جبر چند جمله‌ای‌ها بوده است، لذا هر وقت از این ابزار خواستیم استفاده کنیم و تاخیر انتقالی داشتیم، باید آن را با استفاده از تقریب Pade به چند جمله‌ای تبدیل کنیم:

$$\text{تقریب درجه اول Pade: } e^{-\tau_d s} = e^{-\left(\frac{\tau_d}{2} + \frac{\tau_d}{2}\right)s} = \frac{e^{-\frac{\tau_d}{2}s}}{e^{+\frac{\tau_d}{2}s}} \approx \frac{1 - \frac{\tau_d}{2}s}{1 + \frac{\tau_d}{2}s}$$

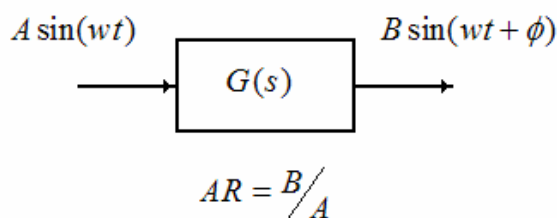
دقت شود مکان هندسی تابع انتقالی که دارای $e^{-\tau_d s}$ است شامل عدّه نامتناهی از شاخه‌ها (قطبهای مدار بسته) خواهد بود که تولید آن بسیار سخت است.

آشنایی با پاسخ فرکانسی

مقدمه

ضرورت استفاده از ورودی سینوسی (تناوبی، فرکانسی) را می‌توان از دو منظر بررسی کرد: دیدگاه مهندسی شیمی: فرض کنید بخواهیم تابع انتقال یک برج تقطیر با ۱۵ سینی را بدست آوریم. روش ریاضی مدل‌سازی، یعنی با استفاده از بیلان جرم و انرژی و سپس خطی‌سازی بسیار سخت، پرهزینه و یا حتی غیرممکن می‌باشد. از طرفی با بهره‌گیری از روش تجربی نظیر پاسخ پله، ضربان و پالس، نیز همه مودها فعال نمی‌شوند. یک راه شناسایی (تجربی) سیستم‌ها استفاده از پاسخ فرکانسی می‌باشد. با تکرار اعمال ورودی سینوسی در فرکانس‌های مختلف و اخذ رکوردهای نسبت دامنه‌های خروجی به ورودی و تاخیر فاز خروجی نسبت به ورودی می‌توان به شناسایی، تحلیل و حتی طراحی کنترلر مناسب پرداخت.

دیدگاه برق و مخابرات: معمولاً ورودی‌ها (ذاتاً) به صورت موج سینوسی و یا ترکیبی از امواج تناوبی است. لذا در مباحثی مثل پردازش سیگنال (Signal Processing) یا طراحی فیلتر (Filter Design) استفاده از اصطلاحات و ابزار پاسخ فرکانسی طبیعی و حتی توفیق اجباریست. به‌طور خلاصه، از معایب پاسخ فرکانسی می‌توان به زمان‌بر بودن روش در فرکانس‌های کم و نیازمندی به شیرکنترل‌های با واکنش سریع در فرکانس‌های زیاد اشاره کرد. لازم به‌ذکرست که در مهندسی شیمی، روش‌های پاسخ فرکانسی بیشتر مصرف تحلیل و شناسایی دارند.



قاعده جایگذاری (Substitution Rule)

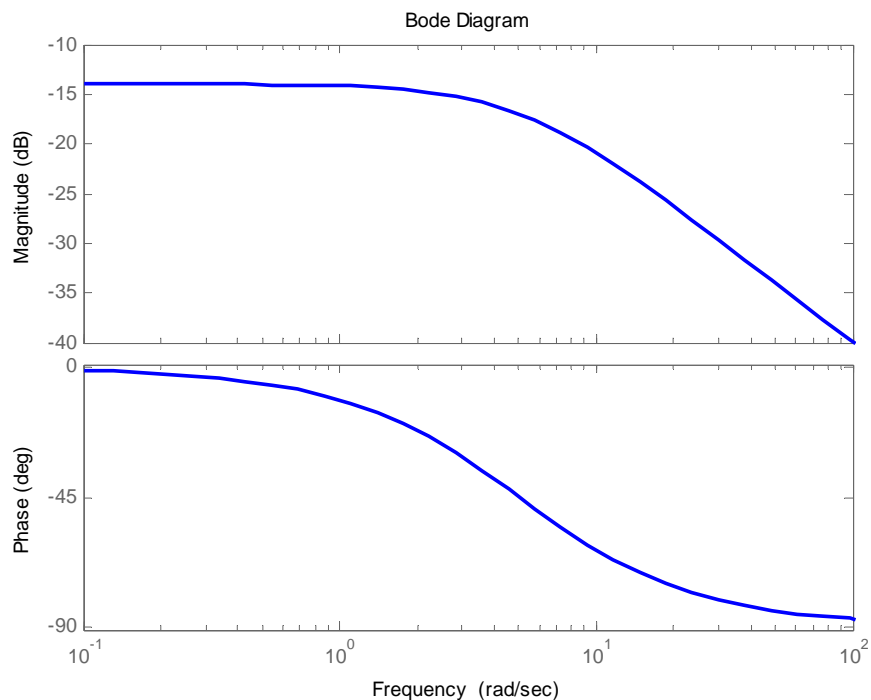
همانطور که برای پاسخ سینوسی سیستم‌های درجه اول و دوم دیدیم، وقتی به خروجی ماندگار رسیدیم، دامنه خروجی نسبت به دامنه ورودی تغییر کرده بود (بنام Amplitude Ratio-AR). همین‌طور نسبت به همدیگر اختلاف فاز داشتند (معروف به ϕ Phase Angle). حال اگر بتوانیم AR و ϕ را از روی تابع انتقال سیستم بدست آوریم (از قسمت گذرای آن می‌گذریم) آنگاه از یک ابزار تحلیل و طراحی قوی برخوردار خواهیم شد.

می‌توان اثبات کرد که AR و ϕ برای پاسخ خروجی یک تابع انتقال به شکل $G(s)$ از روی روابط زیر بدست می‌آید. با جایگذاری $j\omega$ به جای s در تابع انتقال نسبت دامنه‌ها و اختلاف فاز در حالت ماندگار به دست می‌آید:

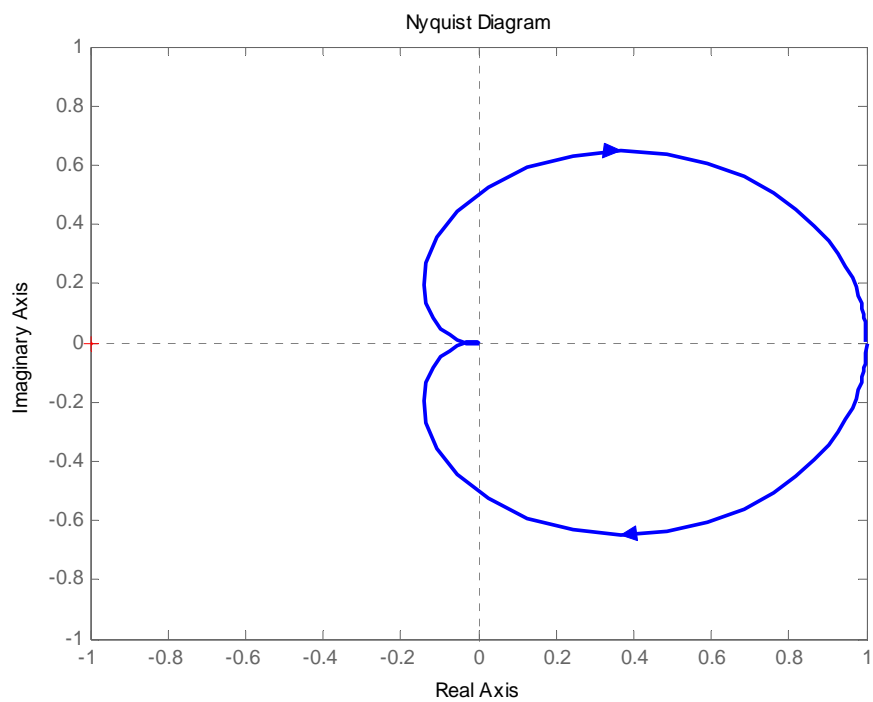
(نسبت دامنه‌ها)	$AR = G(j\omega) $
(اختلاف فاز)	$\phi = \angle G(j\omega)$

کار کردن با $G(j\omega)$:

چون $G(s)$ یک تابع گویا (نسبت دو چند جمله‌ای با ضرایب حقیقی) از متغیر (مستقل) مختلط s می‌باشد، پس خود $G(s)$ (متغیر تابع) نیز عموماً (نوعاً) یک عدد مختلط است. از طرفی چون s را $j\omega$ گذاشته‌ایم، این عدد مختلط نسبت به ω نیز پارامتریزه است. به بیان دیگر اندازه و زاویه (یا قسمت حقیقی و موهومی) این عدد نمونه تابع ω (فرکانس تحریک) می‌باشد. در این درس به دو ابزار گرافیکی معروف و مهم که از $G(j\omega)$ استفاده می‌کنند، می‌پردازیم. یکی دیاگرام Bode که $G(j\omega)$ را به صورت پارامتریزه (بر حسب ω) در دو منحنی نمایش می‌دهد. بیشترین استفاده آن در طراحی و عملکرد کنترلر است.



شکل ۱- یک دیاگرام بُد نمونه.



شکل ۲- یک دیاگرام نایکوئیسیت نمونه.

دیگری، دیاگرام نایکوئیسیت می باشد، که $G(j\omega)$ را در صفحه مختصات کمپلکس نشان می دهد. بیشترین استفاده آن در بحث پایداری است.

دیاگرام های Bode

سیستم درجه اول: برای سهولت، ورودی سینوسی را با دامنه ۱ فرض کرده و تابع انتقال سیستم درجه اول را به شکل $G(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$ در نظر می گیریم. لازم به ذکر است که در شرح نمودارها، عبارت کلی سیستم را به جای فرآیند اطلاق می کنیم، ولی استفاده ما در مهندسی شیمی از دیاگرام های بُد (به ویژه در بحث پایداری) نوعاً همان سیستم مدارباز می باشد. از روی مطالعات اولیه درس (پاسخ سینوسی) یا از روی $G(jw)$ خواهیم داشت:

$$G(jw) = \frac{1}{\tau(jw) + 1} = \frac{1 - \tau(jw)}{(1 + \tau(jw))(1 - \tau(jw))} = \frac{1 - (\tau w)j}{1 + (\tau w)^2} = \underbrace{\frac{1}{1 + (\tau w)^2}}_{\text{Real part}} + \underbrace{\frac{-(\tau w)j}{1 + (\tau w)^2}}_{\text{Imaginary part}}$$

در نتیجه اندازه و فاز عدد مختلط $G(jw) = \frac{1}{\tau(jw) + 1}$ به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\begin{cases} |G(jw)| = \sqrt{\left(\frac{1}{1 + (\tau w)^2}\right)^2 + \left(\frac{-(\tau w)}{1 + (\tau w)^2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\tau w)^2}} \\ \angle G(jw) = \text{tg}^{-1}\left(\frac{\frac{-(\tau w)}{1 + (\tau w)^2}}{\frac{1}{1 + (\tau w)^2}}\right) = \text{tg}^{-1}(-(\tau w)) \end{cases}$$

و در نتیجه:

$$G(jw) = \frac{1}{\tau(jw) + 1} = \underbrace{\frac{1}{1 + (\tau w)^2}}_{\text{Real part}} + \underbrace{\frac{-(\tau w)}{1 + (\tau w)^2}}_{\text{Imaginary part}} j = |G(jw)| e^{+(\angle G(jw))j}$$

حالات حدی اندازه و فاز یک سیستم درجه اول بر حسب w نیز به صورت زیر قابل محاسبه اند:

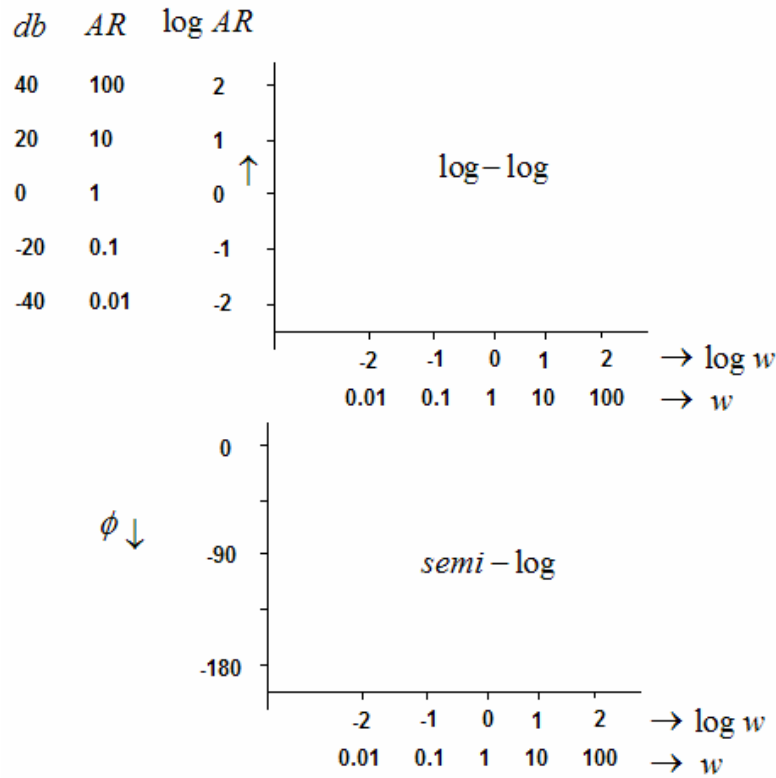
w کوچک	$ G(jw) \cong 1$, $\angle G(jw) \cong 0$
w بزرگ	$ G(jw) \cong \frac{1}{\tau w}$, $\angle G(jw) \cong -(\pi/2)$ or -90°

نمایش گرافیکی $|G(jw)|$ و $\angle G(jw)$ بر حسب w ، به صورت دو منحنی semi-log و log-log است. علت استفاده از log به خاطر دو چیز است:

(۱) در گستره بیشتری از w کار کنیم و (۲) منحنی های نمودارها نیز damp شوند (یعنی به شکل خط راست یا دارای مجانب ظاهر شوند).

همانطور که از شکل ۱ معلومست، محور عمودی دیاگرام اندازه (AR) به سه صورت قابل نمایش است ولی محور افقی هر دو دیاگرام بر حسب $\text{log } w$ می باشد. دقت شود که تعریف دسی بل به صورت زیر می باشد:

$$db = 20 \times \log AR$$



شکل ۱- شماتیک کلی دیاگرام‌های بُد.

مجانب‌های دیاگرام بُد درجه اول :

$$|G(jw)| = AR = \frac{1}{\sqrt{1+(\tau w)^2}} \Rightarrow \log AR = -\log(\sqrt{1+(\tau w)^2}) = -0.5 \log(1+(\tau w)^2)$$

مجانب افقی یا مجانب فرکانس پایین:

$$\text{for } w \rightarrow 0 \quad \log AR = -0.5 \log(1+(0)^2) = 0 \quad (\text{بهره واحد})$$

$$\text{for } w \rightarrow 0 \quad \log AR = \log(k_p) - 0.5 \log(1+(0)^2) = \log(k_p) \quad (\text{بهره غیر واحد})$$

مجانب مایل (با شیب -1) یا مجانب فرکانس بالا:

$$\text{for } w \rightarrow \infty \quad \log AR = -0.5 \log((\tau w)^2) = -\log(\tau w) = -\log(\tau) - \log(w)$$

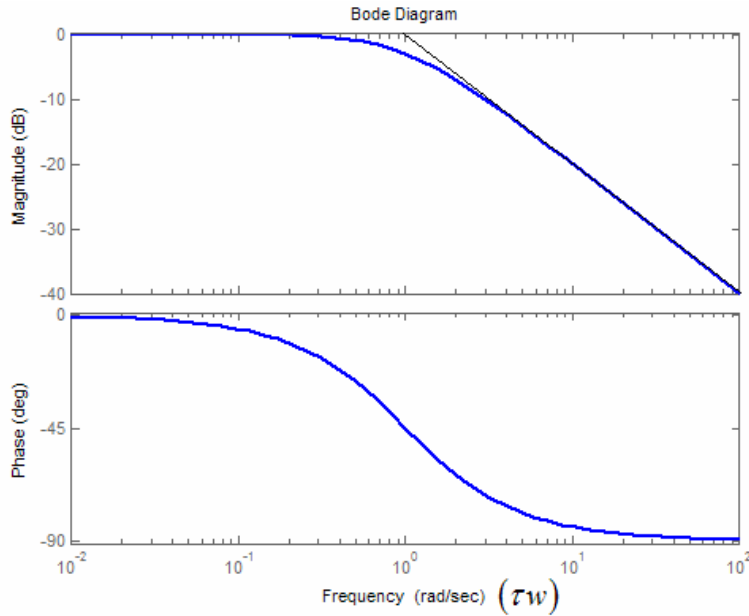
محل تقاطع دو مجانب :

$$0 = -\log(\tau w) \Rightarrow \tau w = 1 \Rightarrow w^* = \frac{1}{\tau}$$

به w^* فرکانس گوشه (corner frequency) می‌گویند.

مقدار انحراف منحنی واقعی با مجانب :

$$\log AR = -\log(\sqrt{1+1^2}) = -(1/2) \log(2) \Rightarrow AR = \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0.707$$



شکل ۲- دیاگرام بُد سیستم درجه اول مقیاس شده (برحسب $\tau\omega$) با بهره واحد، همراه با مجانبهای AR .

دیاگرام های سیستم های درجه اول متوالی :

در مباحث قبلی، گفته شد که دیاگرام بُد عدد مختلط $G(j\omega)$ را رسم می کند، پس اگر چند تا $G_i(j\omega)$ در هم ضرب شوند، قاعده ضرب اعداد مختلط می گوید که اندازه ها نیز ضرب شود (لگاریتم AR ها جمع شود) و زاویه ها نیز جمع شوند :

$$\begin{cases} z_1 = r_1 e^{j\theta_1} = |z_1| e^{j\angle z_1} \\ z_2 = r_2 e^{j\theta_2} = |z_2| e^{j\angle z_2} \end{cases} \Rightarrow z_1 z_2 = |z_1| |z_2| e^{j\{\angle z_1 + \angle z_2\}}$$

نکته: به AR یا اندازه یک عدد مختلط Modulus گویند.

نکته: در رسم دیاگرام بُد برای سرعت محاسبات، همیشه توابع انتقال را به صورت ثابت زمانی نشان دهید و از شکل چندجمله ای (چه مونیك و چه غیر مونیك) و همچنین نمایش صفر و قطب پرهیز کنید.

مثال: مطلوبست شکل محاسباتی و گرافیکی (دیاگرام بُد) پاسخ سیستم با تابع انتقال $G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+5)}$

محاسباتی (سرعتی):

ابتدا $G(s)$ را به صورت ثوابت زمانی نشان می دهیم:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+5)} = \frac{(1/5)}{(s+1)(0.2s+1)} = \frac{G_1(s)}{G_2(s)G_3(s)}$$

$$G_1(s) \triangleq (1/5) \quad , \quad G_2(s) \triangleq \frac{1}{(s+1)} \quad , \quad G_3(s) \triangleq \frac{1}{(0.2s+1)}$$

بدین ترتیب، برای عدد مختلط $z = G(jw)$ ، انگار با سه عدد مختلط z_1, z_2, z_3 طرف هستیم:

$$z = G(jw) = \frac{z_1}{z_2 z_3}, \quad z_1 \triangleq G_1(jw), \quad z_2 \triangleq G_2(jw), \quad z_3 \triangleq G_3(jw)$$

و در نتیجه لگاریتم اندازه و زاویه $z = G(jw)$ از جمع جبری لگاریتم‌های اندازه و فازهای سه عدد مختلط z_1, z_2, z_3 به دست می‌آیند:

$$\begin{cases} \log AR = \log AR_1 - \log AR_2 - \log AR_3 \\ \angle G(jw) = \angle G_1(jw) - \angle G_2(jw) - \angle G_3(jw) \end{cases}$$

اولین تابع انتقال (یعنی $G_1(jw) = 1/5$) یک بهره ساده جبری مثبت (عدد حقیقی) می‌باشد:

$$\begin{cases} \log AR_1 = \log(1/5) = -\log 5 \\ \angle G_1(jw) = 0 \end{cases}$$

(دقت شود اگر با عدد حقیقی منفی سروکار داشتید، اندازه آن مثبت یا همان قدر مطلق عدد جبری مربوطه بوده و فاز آن نیز معادل π رادیان می‌باشد).

دومین و سومین تابع انتقال، هر دو یک سیستم دینامیکی درجه اول با بهره واحد هستند که برای محاسبه لگاریتم اندازه و فاز آنها، می‌توان هر یک را حاصل تقسیم دو عدد مختلط در نظر گرفت:

$$\begin{cases} \log AR_2 = \log\left(\frac{1}{jw+1}\right) = \log\left(\frac{|1|}{|jw+1|}\right) = \log\left(\frac{1}{\sqrt{1+w^2}}\right) = \log(1) - \log(\sqrt{1+w^2}) = -0.5 \log(1+w^2) \\ \angle G_2(jw) = \angle\left(\frac{1}{jw+1}\right) = \angle(1) - \angle(jw+1) = 0 - \angle(jw+1) = -\text{tg}^{-1}\left(\frac{w}{1}\right) = -\text{tg}^{-1}(w) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log AR_3 = \log\left(\frac{1}{(0.2w)j+1}\right) = \log\left(\frac{|1|}{|(0.2w)j+1|}\right) = \log\left(\frac{1}{\sqrt{1+(0.2w)^2}}\right) = -0.5 \log(1+(0.2w)^2) \\ \angle G_3(jw) = \angle\left(\frac{1}{(0.2w)j+1}\right) = \angle(1) - \angle((0.2w)j+1) = 0 - \angle((0.2w)j+1) = -\text{tg}^{-1}\left(\frac{0.2w}{1}\right) = -\text{tg}^{-1}(0.2w) \end{cases}$$

و در نهایت، نتایج محاسباتی زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \log AR = \log(1/5) - 0.5 \log(1+w^2) - 0.5 \log(1+(0.2w)^2) \\ \angle G(jw) = 0 - \text{tg}^{-1}(w) - \text{tg}^{-1}(0.2w) \end{cases}$$

رسم: برای رسم همزمان و نحوه جمع زدن آنها به شکل ۳ رجوع کنید.

چند نکته مهم:

اولاً: چون بیش از یک ثابت زمانی داریم، محور افقی را نمی‌توانیم scale کنیم (با $\tau\omega$).

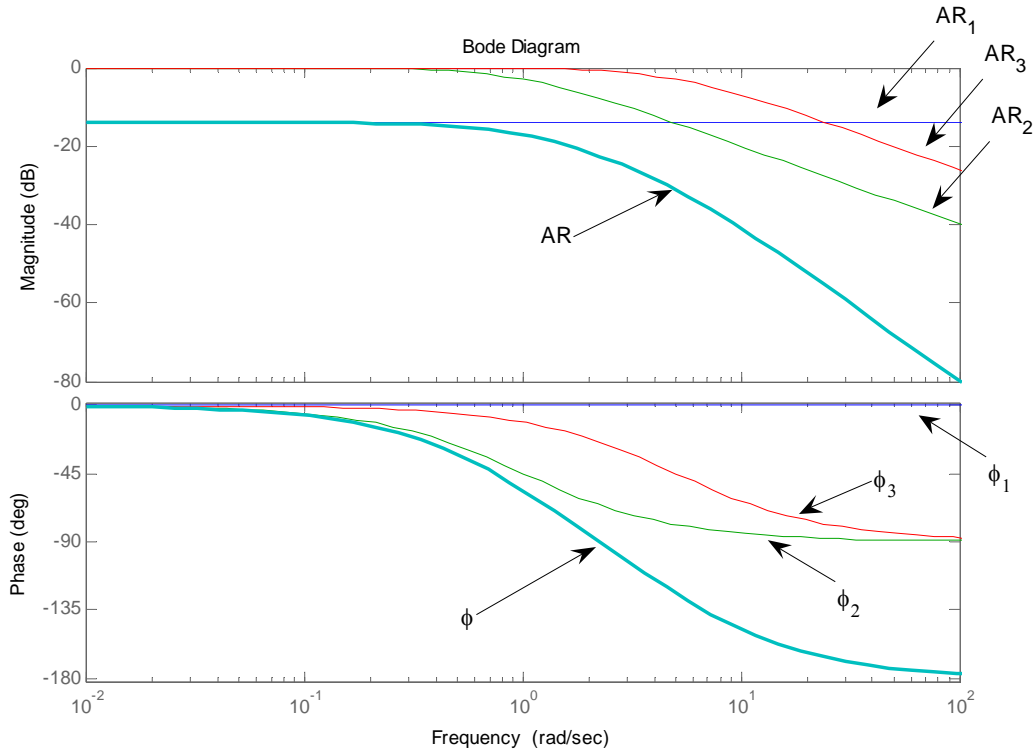
ثانیاً: چون بهره واحد نداریم، محور عمودی را به صورت $\log AR$ (یا AR) می‌گیریم، ولی آنرا به اندازه $\log(\text{gain})$ جابجا می‌کنیم، یا این که آنرا scale می‌کنیم و بصورت AR / gain نمایش می‌دهیم (روش اول توصیه می‌شود).

ثالثاً: $\log AR$ از جمع کردن $\log AR$ تک تک المان‌ها بدست می‌آید.

رابعاً: فرکانس گوشه هر المان در $\tau = 1/\omega$ هر کدام بدست می‌آید.

خامساً: فاز کلی از جمع کردن ساده هر فاز بدست می‌آید و مستقل از بهره یکنواخت است.

سادساً: منحنی سیستم‌های درجه اول همیشه دارای شیب -1 است و ربطی به τ ندارد.



شکل ۳- دیاگرام بُد سیستم‌های متوالی.

دیاگرام بُد سیستم درجه دوم (کلی)

در بحث قبلی، یک سیستم درجه دوم خاص ($\xi \geq 1$) را به شکل دو سیستم درجه اول متوالی طرح کردیم. برای بحث کلی سیستم‌های درجه دوم به شکل زیر ادامه می‌دهیم:

$$G(s) = \frac{1}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1} \Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)| = AR = \frac{1}{\sqrt{(1-(\tau\omega)^2)^2 + (2\xi\tau\omega)^2}} \\ \angle G(j\omega) = \phi = \text{tg}^{-1}\left(\frac{-2\xi\tau\omega}{1-(\tau\omega)^2}\right) \end{cases}$$

حال فرض کنید محور افقی را با τ ، scale کردیم، یعنی محور افقی را بصورت $\tau\omega$ در نظر بگیرید نه ω خالی. آنگاه AR و ϕ را می‌توان بر حسب $(\omega\tau)$ برای هر ξ رسم کرد. به شکل ۴ رجوع کنید.

برای حالات حدی و یک حالت خاص، یعنی $\tau\omega = 1$ ، داریم:

$$(\tau\omega) \rightarrow 0: AR \rightarrow 1, \phi \rightarrow \text{tg}^{-1}(-2\xi\tau\omega) \text{ or } \phi \rightarrow 0$$

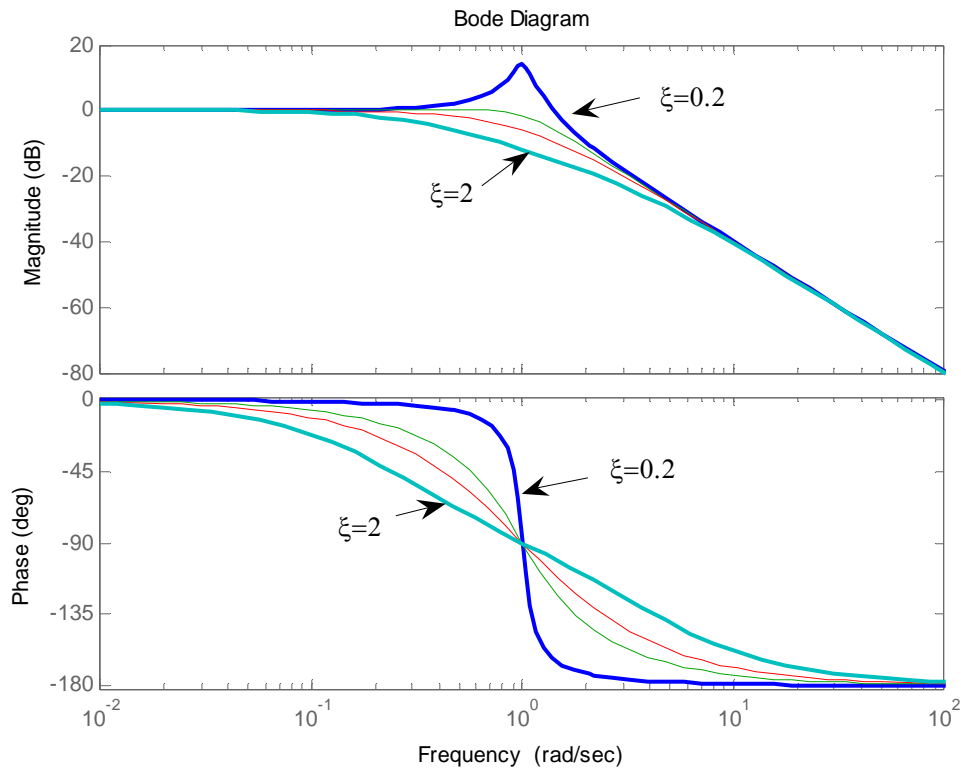
$$(\tau\omega) \rightarrow \infty: AR \rightarrow 0 \text{ or } AR \rightarrow \frac{1}{(\tau\omega)^2}, \phi \rightarrow -\pi$$

$$(\tau\omega) = 1: \phi = \text{tg}^{-1}(-\infty) = -\pi/2$$

نکته: با توجه به روابط بالا، در حالت خاص $\tau\omega = 1$ ، منحنی‌های ϕ مستقل از ξ ، همه همدیگر را در $-\pi/2$ قطع می‌کنند!

نکته: به فرکانسی که در آن AR ماکزیمم شود، فرکانس رزونانس می‌گوییم.

نکته: شیب مجانب فرکانس بالا ۲- است.



شکل ۴- دیاگرام بُد سیستم‌های درجه دوم (کلی).

فرکانس گوشه برای سیستم درجه دوم (محل تقاطع مجانب ها) به شکل زیر محاسبه می شود:

$$(\tau w) = 1: \quad w_c = 1/\tau$$

فرکانس رزونانس: جایی که ماگزیمم AR اتفاق می افتد (از روی مشتق گیری AR بر حسب $\omega\tau$ حاصل شده است) و

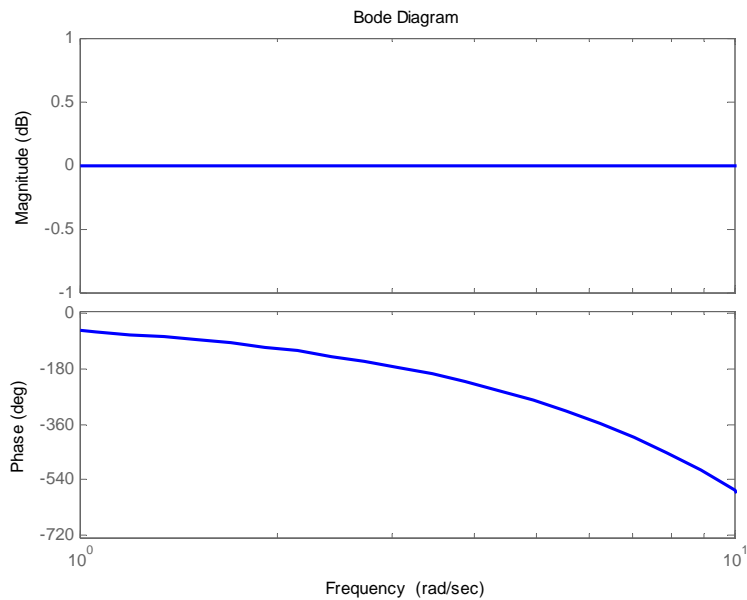
$$w_r = \frac{\sqrt{1-2\xi^2}}{\tau} \quad \text{تابع ضریب میرایی } (\xi) \text{ می باشد:}$$

نکته: رزونانس فقط برای سیستم‌های با $\xi < 0,707$ اتفاق می افتد و برای ξ های بسیار کوچک، فرکانس رزونانس روی فرکانس گوشه قرار می گیرد!

دیاگرام بُد تاخیر انتقالی (pure lag)

تابع انتقال تاخیر انتقالی به صورت نمائی است، در نتیجه دارای اندازه ثابت و فاز همیشه کاهنده می باشد (شکل ۵).

$$G(s) = e^{-\tau_d s} \Rightarrow \begin{cases} |G(jw)| = AR = 1 \\ \angle G(jw) = \phi = -\tau_d w \end{cases}$$

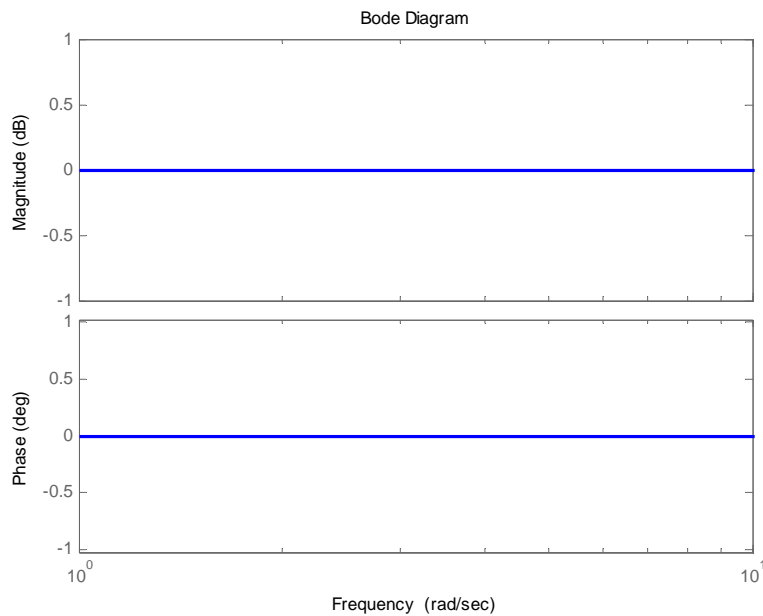


شکل ۵- دیاگرام بُد یک سیستم تاخیر انتقالی ($\tau_d = 1$).

کنترلر تناسبی

تابع انتقال کنترلر تناسبی یک تابع انتقال جبریست، در نتیجه دارای اندازه ثابت و فاز ثابت (معادل صفر) است (شکل ۶).

$$G(s) = K_c \Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)| = AR = K_c \\ \angle G(j\omega) = \phi = 0 \end{cases}$$



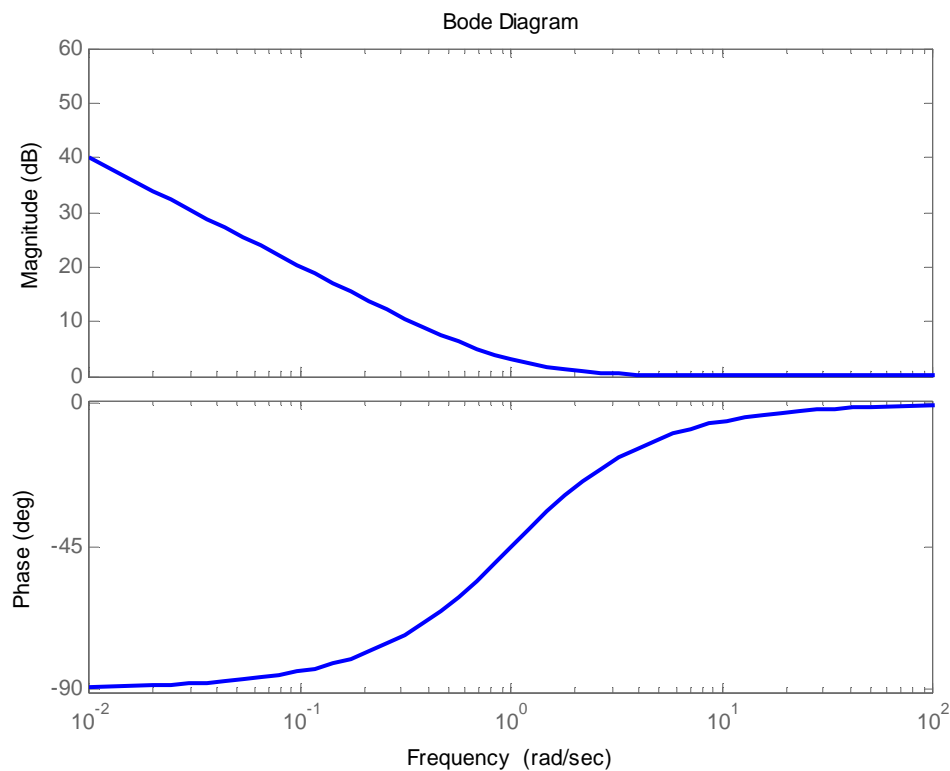
شکل ۶- دیاگرام بُد یک سیستم جبری مثل کنترلر تناسبی ($K_c = 1$).

کنترلر PI

کنترلر PI یا تناسبی-انتگرالی یک کنترلر کامپوزیتست که از جمع یک کنترلر تناسبی و یک انتگرال‌گیر خالص به دست آمده است (شکل ۷).

$$G(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_I s} \right) \Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)| = AR = K_c \sqrt{1 + \frac{1}{(\omega\tau_I)^2}} \\ \angle G(j\omega) = \phi = \text{tg}^{-1} \left(-\frac{1}{\omega\tau_I} \right) \end{cases}$$

توجه: دقت شود در فرکانس‌های پایین وجود انتگرال‌گیر باعث شده است که تقریباً $\pi/2$ - به فاز اضافه کند، یعنی باعث تاخیر می‌شود.

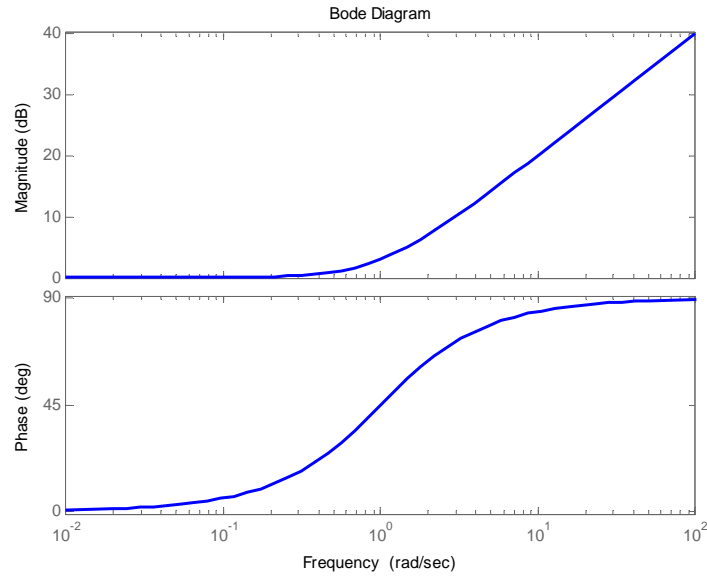


شکل ۷- دیاگرام بُد یک کنترلر تناسبی-انتگرالی ($K_c = 1$, $\tau_I = 1$).

کنترلر PD

کنترلر کامپوزیت تناسبی-مشتقی، دارای رفتار دامنه و فاز، درست بر عکس سیستم درجه اول $1/(TS+1)$ می‌باشد! (شکل ۸)

$$G(s) = K_c (1 + \tau_D s) \Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)| = AR = K_c \sqrt{1 + (\tau_D \omega)^2} \\ \angle G(j\omega) = \phi = \text{tg}^{-1} (\tau_D \omega) \end{cases}$$

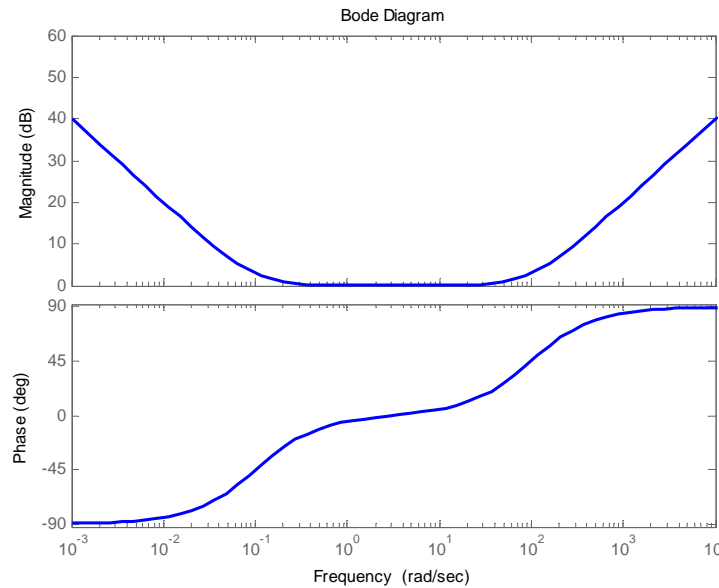


شکل ۸- دیاگرام بُد یک کنترلر تناسبی- مشتقی ($K_c = 1$, $\tau_D = 1$).

کنترلر PID

کنترلر PID یا تناسبی- انتگرالی- مشتقی، یک کنترلر کامپوزیتست که از جمع یک کنترلر تناسبی و یک انتگرال گیر خالص و یک مشتق گیر به دست آمده است (شکل ۹).

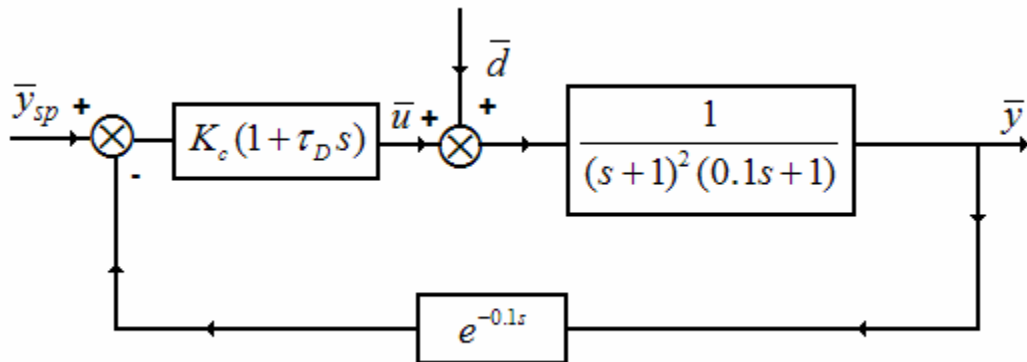
$$G(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_I s} + \tau_D s \right) \Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)| = AR = K_c \sqrt{1 + \left(\tau_D \omega - \frac{1}{\tau_I \omega} \right)^2} \\ \angle G(j\omega) = \phi = \tan^{-1} \left(\tau_D \omega - \frac{1}{\tau_I \omega} \right) \end{cases}$$



شکل ۹- دیاگرام بُد یک کنترلر تناسبی- انتگرالی- مشتقی ($K_c = 1$, $\tau_I = 10$, $\tau_D = 0.01$).

مثال: دیاگرام بُد (مدار باز) سیستم زیر را رسم کنید. پارامترهای کنترلر عبارتند از: $\tau_D = 0.5$ ، $K_c = 10$

نکته: چون دینامیک سیستم را با $1 + G^{OL} = 0$ نمایش می‌دهیم، یعنی G^{OL} (مدار باز) را در نظر می‌گیریم و از روی آن راجع به مدار بسته حرف می‌زنیم (مثلا قطب‌های مدار بسته کجاست؟)، لذا هنر تحلیل پایداری در یک بحث قیاسی مستقل از ساختار کنترلر می‌باشد.



$$G^{OL}(s) = \frac{10(0.5s+1)e^{-0.1s}}{(s+1)^2(0.1s+1)} \Rightarrow \begin{cases} AR_1 = |0.5jw+1| & , \phi_1 = \angle(0.5jw+1) \\ AR_2 = |e^{-0.1jw}| & , \phi_2 = \angle(e^{-0.1jw}) \\ AR_3 = \left| \frac{1}{(jw+1)^2(0.1jw+1)} \right| & , \phi_3 = \angle\left(\frac{1}{(jw+1)^2(0.1jw+1)}\right) \end{cases}$$

سیستم AR_1 ، یک سیستم PD است و دارای فرکانس گوشه معادل $w_c = 1/0.5 = 2$ می‌باشد.

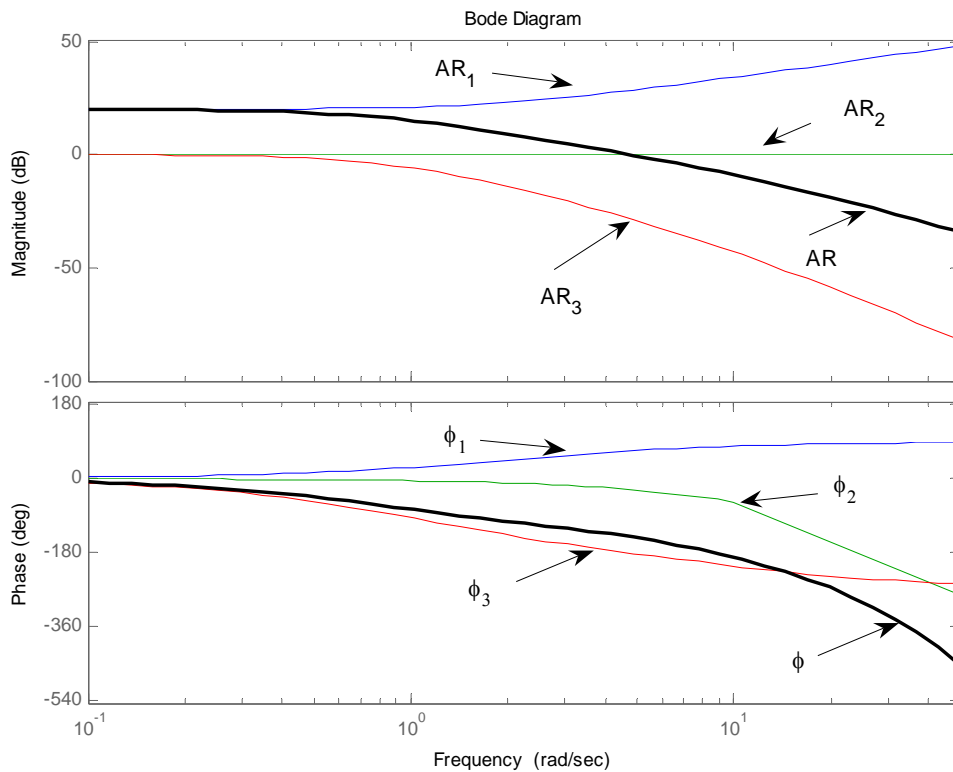
سیستم AR_2 عملاً روی اندازه تاثیری ندارد ولی (قدرمطلق) فاز آن مرتباً زیاد می‌شود.

و سیستم AR_3 یک سیستم (درجه اول) متوالیست و دارای دو فرکانس گوشه می‌باشد:

$$w_{c1} = 1/1.0 = 1 \quad , \quad w_{c2} = 1/0.1 = 10$$

در شکل ۱۰، نمودار بُد سیستم همراه با AR_i و ϕ_i رسم شده‌است.

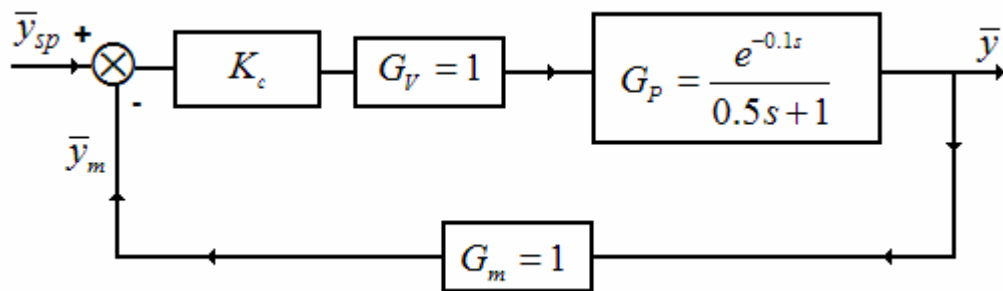
$$\begin{cases} dB(AR) = dB(AR_1) + dB(AR_2) + dB(AR_3) \\ \phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 \end{cases}$$



شکل ۱۰- دیاگرام بُد سیستم مدارباز مثال، شامل فرآیند درجه سوم، تاخیر انتقالی در اندازه‌گیری و کنترلر PD ($\tau_D = 0.5$, $K_c = 10$).

معیار پایداری بُد

ایده اولیه: یک سیستم نمونه مداربسته مشابه بلوک دیاگرام زیر در نظر بگیرید به طوری که حداقل یک تاخیر انتقالی در مسیر سیگنال‌ها باشد. برای سهولت، کنترلر را تک پارامتره یعنی کنترلر تناسبی در نظر بگیرید. حال باید به نحوی سیستم را ناپایدار کنیم، تا مثل روش مکان هندسی که قطب‌های مداربسته بر حسب K_c پارامتریزه بود و محل تقاطع با محور موهومی، مرز ناپایداری محسوب می‌شد، در اینجا نیز علی‌رغم وجود تاخیر انتقالی (مداربسته و مدارباز چند جمله‌ای محض نمی‌شوند) سعی کنیم یک معیار پایداری به طور نظری (مبتنی بر مدل فرآیند) به دست آوریم.



از نظر تجربی، فرض کنید در یک مقدار مشخص از K_c شروع به آزمایش برای اخذ پاسخ فرکانسی می‌کنیم. به بیانی دقیق‌تر اگر با ورودی مدار بسته با دامنه معلوم و فرکانس آزمایشی (در اینجا یعنی $\bar{y}_{sp} = A \sin(\omega t)$)، سیستم مدار بسته را تحریک کنیم، آنگاه در یک فرکانس مشخص پاسخ مدار بسته (یعنی \bar{y}_m یا \bar{y}) در آستانه ناپایداری قرار می‌گیرد. این فرکانس مشخص موسوم به فرکانس قطع (cross-over frequency) بوده و آن را با ω_{co} نمایش می‌دهیم. باید دقت کرد همان‌طور که از شرح آزمایش معلومست، فرکانس قطع تابع K_c می‌باشد، لذا آزمایشات (ناپایداری‌سازی پاسخ \bar{y}) را می‌توان طوری ترتیب داد که فرکانس (قطع) را ثابت نگاه داریم و در هر آزمایش K_c را عوض (معمولاً زیاد) کنیم!

برای تشکیل پایه نظری این پدیده (ناپایداری‌سازی پاسخ \bar{y})، باید یک تعبیر یا تفسیر فیزیکی - مهندسی از آن داشته باشیم. به‌خاطر حضور دینامیک‌های متفاوت در مسیر پیشرو (دینامیک مدار باز) و به‌ویژه تاخیر انتقالی، حتماً پاسخ خروجی در حالت ماندگار نسبت به ورودی (\bar{y}_{sp}) تاخیر فاز دارد و بدیهیست که این تاخیر فاز تابعی از فرکانس آزمایش باشد. فرض کنید در یک فرکانس مشخص آزمایشی (همان فرکانس قطع)، خروجی 180° درجه از ورودی عقب بیافتد (یعنی فاز مدار باز معادل $-\pi$ باشد). به زبان ریاضی، اگر پاسخ خروجی به شکل سینوسی (فرکانسی) کلی $\bar{y} = B \sin(\omega t + \phi)$ با نسبت دامنه معادل با $AR = \frac{B}{A}$ باشد، آنگاه در این فرکانس به صورت $\bar{y} = B \sin(\omega^* t - \pi) = -B \sin(\omega^* t)$ در می‌آید. حال به‌خاطر فیدبک منفی، قدرمطلق سیگنال خروجی به‌جای اینکه از \bar{y}_{sp} کم شود، به آن اضافه می‌شود و این یعنی فیدبک مثبت. در این حالت اگر $AR = \frac{B}{A}$ از یک بزرگتر باشد با پدیده گلوله برفی (snow ball effect) مواجه هستیم، یعنی سیگنال در هر پاس فیدبک مثبت مقدار بیشتری می‌گیرد و این یعنی ناپایداری!

بدین ترتیب معیار پایداری بُد با رنگ و لعاب تنوریک به‌شکل زیر بیان می‌شود:

یک سیستم کنترل فیدبک (سنی) موقعی ناپایدارست که AR تابع مدار باز آن در فرکانس قطع بزرگتر از واحد باشد.

محاسبات - برای تمرین و آشنایی با محاسبات مربوطه مثال و سیستم نمونه را دنبال می‌کنیم:

$$G^{OL} = \left(\frac{\bar{y}_m}{\bar{y}_{sp}} \right) = \frac{K_c e^{-0.1s}}{0.5s + 1} \Rightarrow \begin{cases} AR = \frac{|K_c|}{|0.5j\omega + 1|} = \frac{K_c}{\sqrt{1 + 0.25\omega^2}} \\ \phi = \angle(e^{-0.1j\omega}) - \angle\left(\frac{1}{0.5j\omega + 1}\right) = -0.1\omega - \tan^{-1}\left(\frac{0.5\omega}{1}\right) \end{cases}$$

معیار پایداری بُد هم با نسبت دامنه‌ها ($AR = |G^{OL}(j\omega)|$) کار می‌کند و هم با فاز تابع انتقال مدار باز ($\phi = \angle G^{OL}(j\omega)$) ولی با توجه به رابطه بالا فقط ϕ تابع یک‌متغیره از ω می‌باشد و AR علاوه بر ω ، تابع K_c نیز هست. لذا، طبیعتاً برای محاسبات تحلیلی پایداری بُد از رابطه $\phi(\omega) = -\pi$ شروع کنیم. پس ابتدا سعی می‌کنیم فرکانس قطع را از روی رابطه غیر خطی $\phi(\omega)|_{\omega=\omega_{co}} = -\pi$ به‌دست آوریم:

$$\phi = -0.1\omega - \tan^{-1}(0.5\omega) = -\pi$$

به‌عبارتی باید ریشه معادله غیرخطی زیر که همان فرکانس قطع باشد را پیدا کنیم:

$$f(\omega) = 0.1\omega + \tan^{-1}(0.5\omega) - \pi = 0$$

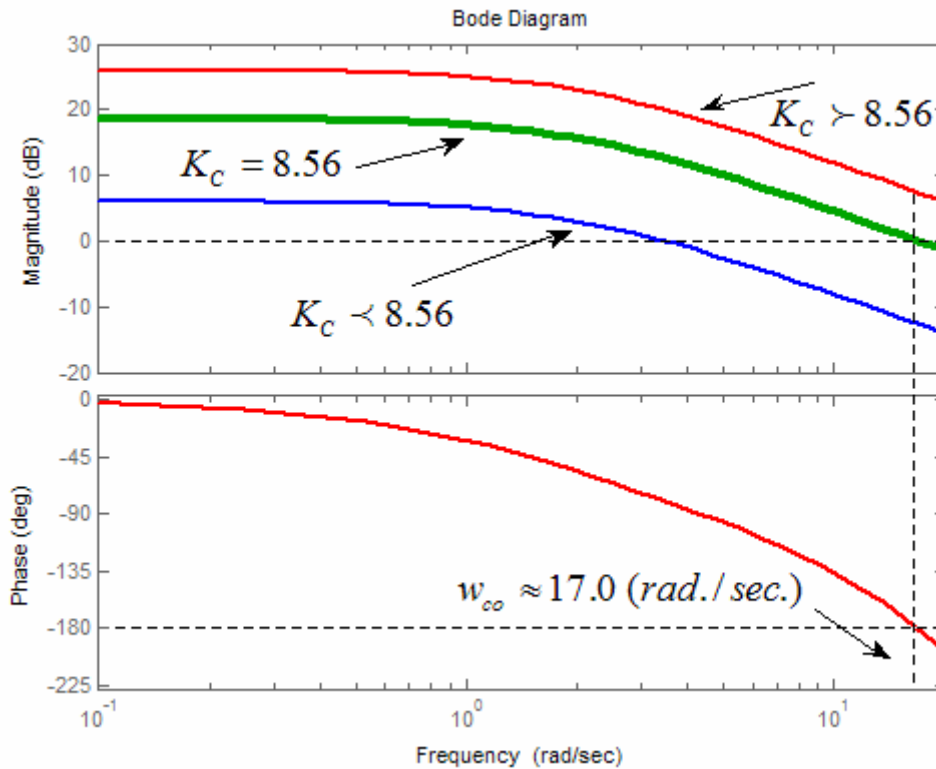
یک روش حل عددی معادله بالا، روش تکرار هندسی با فرمول تکرار زیر می‌باشد:

$$0.1w + tg^{-1}(0.5w) - \pi = 0 \Rightarrow w_{co}^{(nxt)} = \frac{\pi - tg^{-1}(0.5w_{co}^{(prv)})}{0.1}$$

با چندبار سعی و خطا به جواب $w_{co} \approx 17.0 \text{ (rad./sec.)}$ می‌رسیم.

حال اگر K_C معلوم باشد، آنگاه با جایگذاری مقدار فرکانس قطع در فرمول اندازه و ارزیابی مقدار آن (آیا بزرگتر از یک هست؟) می‌توان پایداری مدار بسته را چک کرد. از معیار پایداری بُد می‌توان برای تعیین حد بالای K_C (موسوم به $K_C^{ultimate}$) را که منجر به ناپایداری مدار بسته می‌شود استفاده نمود. برای این کار کفایت مقدار فرکانس قطع را در فرمول اندازه با K_C مجهول و $AR=1$ قرار داده و $K_C^{ultimate}$ را حساب کنیم.

برای قضاوت کیفی و ارزیابی کلی محاسبات فوق‌الذکور به شکل ۱۱ مراجعه کنید.



شکل ۱۱- تبیین محاسبات و روند کاری معیار پایداری برای یک سیستم نمونه.

تنظیم کنترلر، جلسه پانزدهم

مقدمه - عملکرد یک کنترلر بستگی مستقیم و زیادی به تنظیم پارامترهای آن دارد تا طراحی ساختار آن! عمل تنظیم توسط کاربر نهایی با توجه به شناختی که به‌طور کیفی از فرآیند دارد انجام می‌شود. رویکردهای بسیار متنوعی برای تنظیم عملکرد کنترلر مطالعه و نتایج آن منتشر شده‌است. تقسیم‌بندی و انگیزه پشت نحوه تنظیم، تماما بستگی به شاخص عملکرد دارد. بدین معنی که منظور از کنترل خوب توسط یک میزان کمی و عددی و به‌عبارت ساده‌تر تابع هدف بیان شود. آیا عملکرد کنترلر، تنظیم رگولاتوری را نشانه رفته یا اینکه قرارت تغییر در مقدار مقرر را خوب پاسخ دهد. آیا میزان خوب بودن، معادل اورشوت کم است، آیا پایدارسازی معیار کنترل خوبست، آیا فرآیند کند است و باید آنرا تند کنیم یا برعکس، آیا شاخص عملکرد باید اپراتورفهم باشد یا می‌توان از قاموس مهندسی کنترل و اصطلاحاتی نظیر حاشیه بهره، حاشیه فاز و پهنای باند نیز استفاده کرد. نتیجه پاسخ این سوالات و مشابه آنها، عملاً تنظیم کنترلرست. قدیمی‌ترین نوع تنظیم کنترلر توسط زیگلر و نیکولز (Ziegler & Nichols) از شرکت ابزار دقیق تیلور (Taylor Instrument Co.) برای پارامترهای بهینه کنترلرهای PI و PID تداخلی به‌منظور پاسخ خوب پله اغتشاشات یک فرآیند کند (lag-dominant) ارائه شد. تنظیم ZN قدیمی بوده و باید توجه داشت که جهت تغییر در مقدار مقرر و برای فرآیندهای شامل تاخیر محض (deadtime-dominant) مناسب نبوده و فقط به‌عنوان تقریب و حدس اولیه به کار برده می‌شوند.

کاربرد دیاگرام بُد در طراحی (مفاهیم Phase & Gain Margin)

کاربرد بد را در تحلیل پایداری دیدیم، می‌خواهیم کاربرد آن را در طراحی ببینیم. یادآوری: طراحی کنترلر شامل دو بخش عمده است:

یکی انتخاب یا طراحی ساختار (PI یا PD یا lead-lag یا ۲۰ تای دیگر) (یعنی خطای فیدبک را چگونه استفاده کنند)، دیگری ساختار فیکس ولی انتخاب پارامترهای بهینه نسبت به شاخص عملکرد معروف به tuning.

شاخص عملکرد در Freq Domain بجای Time Domain

ایده پشتیبان این نوع شاخص عملکرد اینست که چقدر از مرز ناپایداری دور هستیم؟ با گرافیک قضایا روشن می‌شود (شکل ۱)، از نظر محاسباتی حاشیه بهره و حاشیه فاز به‌شکل زیر محاسبه می‌شوند:

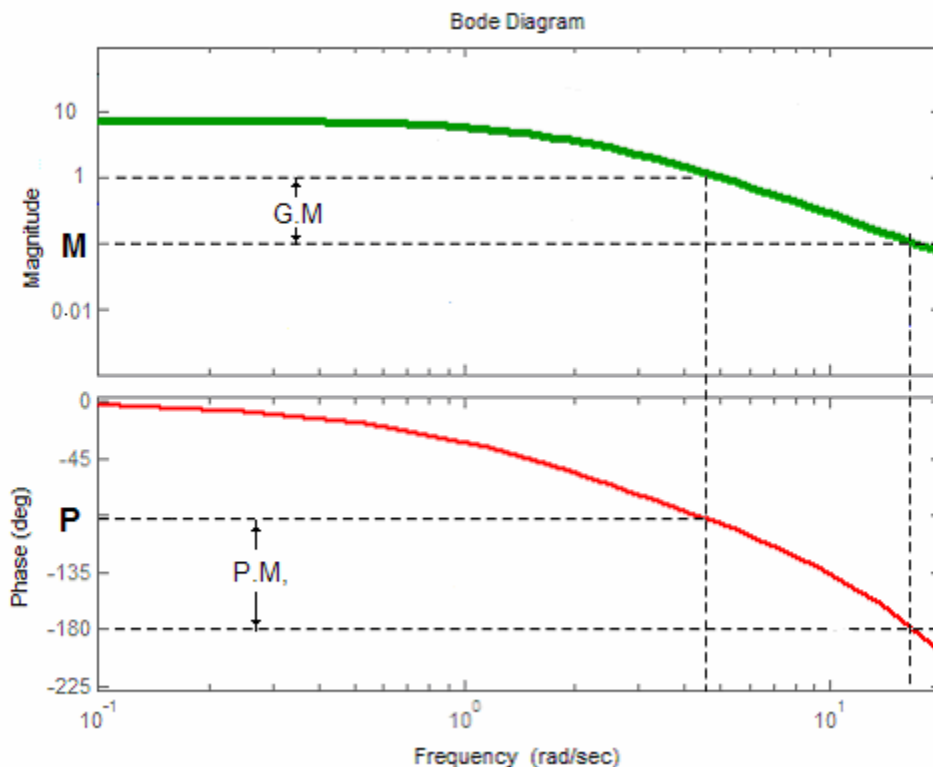
$$G.M. = \text{Gain Margin} = \frac{1}{M}$$

$$P.M. = \text{Phase Margin} = 180^\circ - P$$

با توجه به تعاریف بالا شرط پایداری اینست که حاشیه بهره همیشه بزرگتر از واحد و حاشیه فاز همیشه مثبت باشد. اعداد نمونه برای حاشیه بهره و حاشیه فاز عبارتند از:

$$\text{تنظیم تند و تیز): } P.M. \approx 30^\circ, \quad G.M. \approx 1.7$$

$$\text{تنظیم محافظه کارانه): } P.M. \approx 45^\circ, \quad G.M. \approx 2$$



شکل ۱ - دیاگرام بد یک مدارباز نمونه.

مثال ۱: $G.M.$ و تنظیم کنترلر: همان مثال خودمان در فصل قبلی را در نظر بگیرید

$$AR = \frac{K_C}{\sqrt{1+0.25(17)^2}} = 0.12K_C \Rightarrow G.M. = \frac{1}{0.12K_C}$$

(شاخص عملکرد): فرض کنید به طور تجربی حاشیه بهره رامعادل $G.M. = 1.7$ قرار دهیم:

$$G.M. = \frac{1}{0.12K_C} = 1.7 \Rightarrow K_C = 4.9$$

حال فرض کنید تاخیر انتقالی 0.10 نبود، بلکه به طور واقعی 0.15 بود (یعنی 50% خطای مدل سازی داشتیم):

$$G^{OL}(s) = \frac{K_C e^{-0.15s}}{0.5s+1} \Rightarrow \text{محاسبه } AR \text{ در } w_{co}:$$

$$\angle G^{OL}(jw) = -\pi \rightarrow \dots \rightarrow w_{co} = 11.6 \rightarrow |G^{OL}(jw)| = \frac{4.9}{\sqrt{1+(0.5 \times 11.6)^2}} = 0.83 < 1$$

پس با این تنظیمی که انجام دادیم (محاسبه K_C با استفاده از مدل و شاخص $G.M.$) علیرغم خطای 50% در تاخیر انتقالی (بدترین عامل ناپایداری)، سیستم هنوز پایدارست، گرچه عملکرد (مثلا تغییر پله در setpoint) خراب تر شده است.

مثال ۲: $P.M.$ و تنظیم عملکرد: همان مثال خودمان:

$$AR = \frac{K_C}{\sqrt{1+0.25w^2}}, \quad \phi = -0.1w - \tan^{-1}(0.5w)$$

فرض کنید $P.M.$ معادل 30° باشد:

$$\phi = -(180^\circ - 30^\circ) = -150^\circ \Rightarrow -150^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = -0.1w - tg^{-1}(0.5w) \Rightarrow w = 12.5 \Rightarrow$$

$$AR = 1 = \frac{K_c}{\sqrt{1 + 0.25(12.5)^2}} \Rightarrow K_c = 6.33$$

سیستم محافظه کارانه تر شده یا تیزتر؟

فرض کنید دوباره خطای 50% در تاخیر انتقالی (در مدل نامی) داریم، یعنی سیستم به طور واقعی اینطوری است:

$$G^{OL}(s) = \frac{K_c e^{-0.15s}}{0.5s + 1} \Rightarrow \angle G^{OL}(s) \Big|_{w=12.5} = tg^{-1}(-0.5 \times 12.5) + (-0.15 \times 12.5) = -188^\circ$$

یعنی سیستم ناپایدار می شود، لذا، بهتر است آن را $detune$ کنیم، یعنی محافظه کارانه تر کنیم.

توجه: در عمل $G.M.$ و $P.M.$ و سایر شاخص هایی که بعدا خواهیم گفت، بعنوان starting point در نظر گرفته می شوند، چون اساس کنترل کلاسیک بر سعی و خطا استوار است.

شاخص عملکرد کنترلر در حوزه زمان - یکی از متداول ترین میزان های عملکرد کنترلر در حوزه زمان جهت تنظیم

بهینه پارامترهای آن استفاده از مقدار انحراف متغیر کنترل شونده و انتگرال آن در پاسخ به ورودی مدار بسته اعم از اغتشاش یا تغییر در مقدار مقرر می باشد. اگر حلقه حول نقطه کاری تقریباً خطی باشد، آنگاه اندازه انحراف و همچنین انتگرال آن متناسب با اندازه ورودی تحریک کننده می باشد.

تغییر پله را عملاً می توان به صورت زیر انجام داد. ابتدا کنترلر در مود دستی (manual) قرار می گیرد و سپس یک تغییر در پله خروجی کنترلر داده شده و بلافاصله کنترلر در مود خودکار (auto) قرار داده می شود. شاخص ماگزیم انحراف که در تنظیم یا بهینه یابی پارامترها سعی می شود مقدار آن مینیمم شود، غالباً برای فرآیندهایی به کار می رود که مسئله ایمنی داشته باشند. فرآیندهایی مثل کنترل فشاربخار، سطح مخزن و کنترل دمای بویلر از جمله سیستم هایی هستند که تجاوز مقدار متغیر کنترل شونده از یک حد مجاز و ایمن می تواند خطر ساز باشد. همین منوال برای مشخصه های مطلوب و کنترل کیفی محصولات نیز می تواند برقرار شود، چراکه عبور از یک حد معین در برخی از مشخصه های کیفی محصول می تواند باعث مرجوع شدن آن به کارخانه شود. اگر محصول به طور پیوسته تولید می شود و در یک مخزن نگهداری در پایین دست واحد تولیدی انباشته می شود، آنگاه کیفیت محصول عملاً متوسط گیری می شود، لذا باید معیار عملکرد روی انتگرال خروجی مغشوش گذاشته شود.

انتگرال های معروف خطای فیدبک به عنوان شاخص عملکرد (PI) عبارتند از:

(PI)		(PI)	
$\int e^2 dt$	Integral of Squared Error - ISE	$\int t e dt$	Integral of Time-weighted Absolute Error - ITAE
$\int e dt$	Integral of Absolute Error - IAE	$\int te^2 dt$	Integral of Time-weighted Squared Error - ITSE

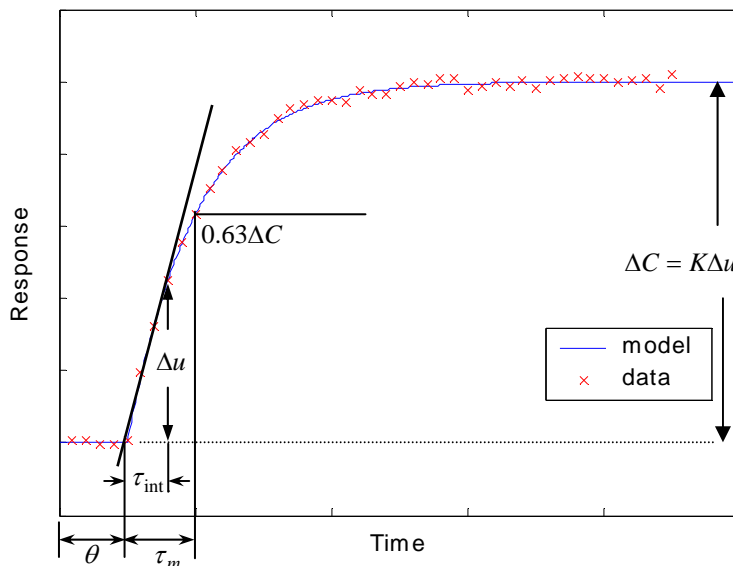
تنظیم بر اساس مدل فرآیند - توسعه کامپیوترهای سریع‌المحاسب و بسته‌های شبیه‌ساز دینامیکی منجر به منسوخ شدن تکنیک‌های قدیمی تنظیم کنترلر شده است. امروزه روال تنظیم برای یک فرآیند متوسط و پیچیده به این صورت است که با استفاده از شبیه‌ساز (مدل غیرخطی و قریب به واقعیت دینامیک فرآیند)، چندین دفعه (شاید میلیون‌ها بار) فرآیند را در معرض اغتشاش قرار داده و با استفاده از یک شاخص عملکرد تنظیم بهینه را یافته و اعتباربخشی (validation) می‌کنند. سپس در عمل آن تنظیم‌ها را متناسب با قیود عملی و نویز واقعی کوک (fine tune) می‌کنند. به هر حال، نکته کار داشتن دانشی عمیق‌تر و به عبارت بهتر، داشتن مدلی (ولو خطی) از فرآیند می‌باشد تا اگر تنظیم بهینه‌ای هم از پارامترهای مجرد و غیرقابل تفسیر کنترلر به دست نیامد لافل یک مقدار نزدیک به بهینه (sub-optimal) از آنها داشته باشیم.

جدول ۱- قوانین سرانگشتی برای تنظیم پارامترهای کنترلر مبتنی بر مدل فرآیند (حذف اغتشاش).

Process	Controller	P	τ_I	τ_D
Dead-time-dominant	PI	$250K$	0.5θ	
Lag-dominant	PI	$106K\theta / \tau_m$	4.0θ	
	PID (non-interacting)	$77K\theta / \tau_m$	1.8θ	0.45θ
	PID (interacting)	$106K\theta / \tau_m$	1.5θ	0.55θ
Non-self-regulating	PI	$106\theta / \tau_{int.}$	4.0θ	
	PID (non-interacting)	$78\theta / \tau_{int.}$	1.9θ	0.48θ
	PID (interacting)	$108\theta / \tau_{int.}$	1.6θ	0.58θ
Distributed lags	PI	$20K$	$0.5\Sigma\tau$	
	PID (non-interacting)	$10K$	$0.3\Sigma\tau$	$0.09\Sigma\tau$
	PID (interacting)	$15K$	$0.25\Sigma\tau$	$0.1\Sigma\tau$

در جدول ۱، مقادیر تقریبی تنظیم پارامترهای کنترلر برای حذف اغتشاش انواع فرآیندها به عنوان تنظیم اولیه و بر مبنای مینیمم IAE آمده است. بهره یکنواخت فرآیند (K) و ثابت زمانی (τ_m) از حاصلضرب توابع انتقال فرآیند و بهره شیر کنترلر به دست آمده‌اند. پارامتر θ به عنوان تاخیر محض فرآیند متوسط‌گیری شده و پارامتر $\tau_{int.}$ به عنوان ثابت زمانی انتگرال‌گیر یا لوپ پایدارکننده فرآیندهای غیرخودتنظیم (non-self-regulating) و ناپایدار نقش بازی می‌کند. منظور از $\Sigma\tau$ ، جمع تمامی ثوابت زمانی‌های دینامیک انتقال حرارت، برگشتی‌ها، ظروف اختلاط و حتی پروسه‌های با دینامیک تداخلی نظیر برج تقطیر می‌باشد. در حقیقت، پارامترهای گفته‌شده دقیقاً گویای مشخصه‌های واقعی فرآیند نیستند و بلکه پارامترهای یک مدل

تقلیل یافته هستند که غالباً از خطی سازی حول نقطه کاری یا شناسایی تجربی به دست آمده اند. به طور مثال پارامترهای θ ، K و τ_{int} از منحنی پاسخ (تست پله) نشان داده شده در شکل ۲ به دست آمده اند.



شکل ۲- منحنی پاسخ یک فرآیند نمونه.

متشابهاً، همین تنظیمات برای تعقیب مقدار مقرر در جدول ۲ و ۳ آمده است.

جدول ۲- قوانین سرانگشتی برای تنظیم پارامترهای کنترلر PI مبتنی بر مدل فرآیند (تعقیب مقدار مقرر).

Proportional-Integral (PI) Controller: $G_c(s) = K_C(1 + \frac{1}{\tau_I s})$			
	IAE	ITAE	
$K_C = \frac{a_1}{K} \left(\frac{\theta}{\tau_m} \right)^{b_1}$	a_1	0.758	0.586
$\tau_I = \frac{\tau_m}{a_2 + b_2(\theta / \tau_m)}$	b_1	-0.861	-0.916
	a_2	1.02	1.03
	b_2	-0.323	-0.165

جدول ۳- قوانین سرانگشتی برای تنظیم پارامترهای کنترلر PID مبتنی بر مدل فرآیند (تعقیب مقدار مقرر).

Proportional-Integral (PI) Controller: $G_c(s) = K_C(1 + \frac{1}{\tau_I s} + \tau_D s)$			
		IAE	ITAE
$K_C = \frac{a_1}{K} \left(\frac{\theta}{\tau_m} \right)^{b_1}$ $\tau_I = \frac{\tau_m}{a_2 + b_2(\theta / \tau_m)}$ $\tau_D = a_3 \tau_m \left(\frac{\theta}{\tau_m} \right)^{b_3}$	a_1	1.086	0.965
	b_1	-0.869	-0.855
	a_2	0.740	0.796
	b_2	-0.130	-0.147
	a_3	0.348	0.308
	b_3	0.914	0.9292

تنظیم تجربی (مستقل از مدل فرآیند) - زیگلر و نیکولز دو روش تنظیم وقتی به طور صریح مدلی از فرآیند در دست نیست ارائه نمودند. در روش اول یا مدار باز آنها، از منحنی پاسخ فرآیند استفاده می‌شود. نکته جالب آن اینست که برای فرآیندهای بسیار کند و یا حتی غیرخودتنظیم، نیازی به صبر کردن برای رسیدن به حالت یکنواخت جدید نیست و از همان تخمین تاخیر انتقالی و شیب ابتدایی (شکل ۲) استفاده می‌شود. به هر حال، اگر فقط از شیب و عرض از مبدا استفاده می‌شود، می‌توان با رجوع به جدول ۴، تنظیم بهینه و پیشنهادی آنها را به دست آورد.

یادآوری (کنترل PID): وجود عبارت مشتق‌گیر باعث می‌شود که الگوریتم کنترلر مقدار متغیر کنترل‌کننده را متناسب با شدت تغییر متغیر کنترل‌شونده کم یا زیاد کند و به زبان پاسخ فرکانسی باعث پیشی فاز شده و عملاً در دامنه زمان باعث سرعت بیشتر پاسخ شده و به شکل پیش‌بین عمل می‌کند. عمل مشتق‌گیر معمولاً در ترکیب با مود کنترل تناسبی (PD) یا کنترل تناسبی و انتگرالی (PID) به کار برده می‌شود. فرم PD در کنترل رباتیک، الکترومکانیک و برخی صنایع هوا-فضا کاربرد داشته، در حالیکه فرم PID بیشتر در کنترل فرآیندها استفاده می‌شود و در حوزه زمان به شکل زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}
 u &= K_C \left(e + \frac{1}{\tau_I} \int e dt + \tau_D \frac{de}{dt} \right) + u_{ss} \\
 &\equiv \pm \frac{100}{P} \left(e + \frac{1}{\tau_I} \int e dt + \tau_D \frac{de}{dt} \right) + C_0 \\
 &\equiv K_C e + K_I \int e dt + K_D \frac{de}{dt} + b
 \end{aligned}$$

به طوریکه τ_D ثابت زمانی مشتق گیر می باشد. دقت کنید که فرم PID یک مشکل عملی در صنعت دارد و آن هم عبارت $\frac{de}{dt}$ می باشد. اگر مکانیسم سرووی PID مدنظر باشد، آنگاه در اثر تغییر پله در مقدار مقرر، ترم خطای فیدبک در لحظه صفر تغییر، دارای شیب بی نهایت است و لذا با عمل مشتق گیری، با یک جهش مثبت یا منفی در (متغیر کنترل کننده) u مواجه خواهیم شد. لذا برای مقابله و پرهیز از این امر چند راه حل متصور است: یک راه ساده برای جلوگیری از این جهش، استفاده از $\frac{dy}{dt}$ به جای $\frac{de}{dt}$ می باشد، چون خروجی فرآیند به طور طبیعی هیچ وقت جهش نمی کند. راه دیگر، اعمال مقدار مقرر به صورت شیب دار در ابتدای تغییر می باشد. راه حل سوم که در حیطه اختیارات طراح می باشد، استفاده از طراحی کنترلر PID با دو درجه آزادی می باشد. به بیان ساده، با نصب لااقل یک فیلتر پایین گذر (تابع انتقال درجه اول) بعد از سیگنال مقدار مقرر، می توان یک سیگنال پیوسته خطای فیدبک داشت.

در برخی کنترلرهای آنالوگ، به خاطر سهولت ساخت عملی سخت افزار کنترلر، ترم انتگرالی و مشتقی سری می شوند. این نوع کنترلر معروف است به کنترلر تداخلی. می توان نشان داد که رابطه بین پارامترهای غیرتداخلی و تداخلی به شرح زیر می باشد:

$$K_{C,eff} = K_C \left(1 + \frac{\tau_D}{\tau_I}\right), \quad \tau_{I,eff} = \tau_I + \tau_D, \quad \tau_{D,eff} = \frac{1}{\frac{1}{\tau_I} + \frac{1}{\tau_D}}$$

عملکرد کنترلر PID تداخلی (با پارامترهای $K_{C,eff}$ ، $\tau_{I,eff}$ و $\tau_{D,eff}$) برای بسیاری از فرآیندها مثل کنترلر PID غیرتداخلی (با پارامترهای K_C ، τ_I و τ_D) می باشد ولی باید توجه داشت که نحوه تنظیم آنها با همدیگر تفاوت دارد. کنترلرهای دیجیتال امروزی گرچه الزاماً مابه ازای آنالوگ ندارند ولی نوعاً از فرم غیرتداخلی PID تقلید می کنند. مشکل و معضل مهم در استفاده از مشتق گیر، مسأله نویز (اغتشاش تصادفی و فرکانس بالا یا سریع التغییر) در اندازه گیری یا انتقال سیگنال فیدبک می باشد. به همین خاطر استفاده از مود مشتق گیر در کنترل سیستم های جریان و سطح مایع مرسوم نیست، چراکه $\frac{dy}{dt}$ یا $\frac{de}{dt}$ باعث تقویت نویز شده و عمل کنترلر بهتر و سریع تر عملاً بلاموضوع می شود. در طرف مقابل، استفاده از مود مشتق گیر برای کنترل دما و غلظت توصیه می شود، به طوری که این در صنایع فرآیندی جا افتاده است که وجود مشتق گیر یعنی PID می تواند حتی تا دو برابر کنترلر PI، انتگرال خطا را کوچکتر کند بدون اینکه مقاومت حلقه به ناپایداری را عوض کند.

جدول ۴- تنظیم پارامترهای کنترلر PID، پیشنهادی زیگلر-نیکولز (مدار باز).

Controller	P	τ_I	τ_D
PI	$150\theta / \tau_m$	3.5θ	---
PID (non-interacting)	$75\theta / \tau_m$	2.1θ	0.63θ
PID (interacting)	$113\theta / \tau_m$	1.8θ	0.7θ

در روش دوم یا مدار بسته ZN سعی می‌شود با نگه‌داشتن کنترلر در مود فقط تناسبی و افزایش تدریجی (بعد از هر آزمایش) بهره کنترلر سیستم مدار بسته را به نوسان بیاندازیم. اگر بهره نهایی کنترلر را که منجر به نوسان طبیعی سیستم (τ_n) شده را با K_u یا متناظرا با باند تناسبی P_u نمایش دهیم، آنگاه با رجوع به جدول ۵، می‌توان تنظیم بهینه را به دست آورد.

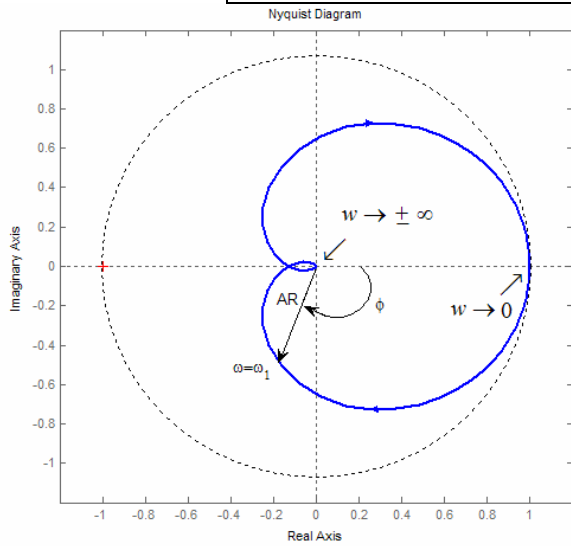
جدول ۵- تنظیم پارامترهای کنترلر PID، پیشنهادی زیگلر-نیکولز (مدار بسته).

Controller	P	τ_I	τ_D
P	$2.0P_u$	---	---
PI	$1.7P_u$	$0.81\tau_n$	---
PID (non-interacting)	$1.3P_u$	$0.48\tau_n$	$0.11\tau_n$
PID (interacting)	$1.8P_u$	$0.39\tau_n$	$0.14\tau_n$

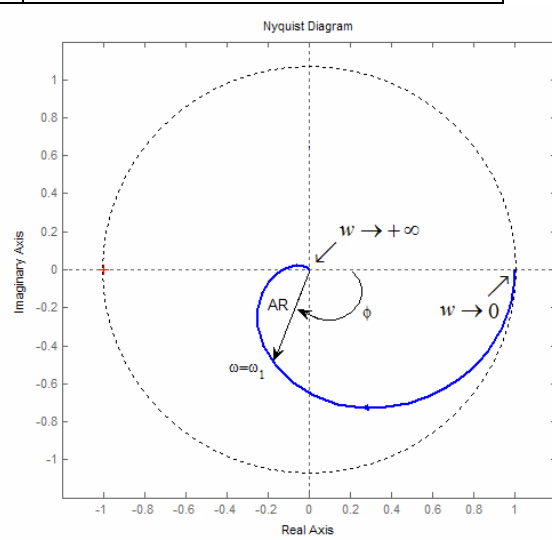
پاسخ فرکانسی، دیاگرام نایکوئیست

مقدمه - دیاگرام نایکوئیست عملاً آلترناتیو دیاگرام بُد است، برای رسم (نمایش گرافیکی) عدد $G(jw)$ ، بعنوان تابعی از w . حُسن آن در عام بودن معیار پایداری است، چون معیار پایداری بُد برای سیستم‌های ساده است، در حالی که معیار پایداری نایکوئیست کلی می‌باشد (توجه کنید با معیار پایداری روت - ویژه فقط چند جمله‌ای‌ها - سه تا معیار خواهیم داشت). بار اطلاعاتی دیاگرام نایکوئیست با دیاگرام بُد مساویست و فقط از نظر نمایشی و همچنین بیان یا تحلیل پایداری با هم تفاوت دارند. در شکل ۱، به‌طور نمونه یک دیاگرام نایکوئیست عملکردمحور (یعنی $w \in (0, +\infty)$) رسم شده‌است. نکته قیاسی (مقایسه با دیاگرام بُد) نمودار و همچنین اصطلاح عملکردمحوری در ارتباط گرافیکی AR و ϕ (یعنی عناصر اصلی دیاگرام بُد) می‌باشد. در شکل ۲ همان دیاگرام ولی به‌طور پایدارمحور (یعنی $w \in (-\infty, +\infty)$) نشان داده شده‌است. در مباحث پایداری معمولاً از این نوع دیاگرام استفاده می‌شود. به نحوه نمایش عدد مختلط $G^{OL}(jw)$ در دو دیاگرام بُد و نایکوئیست توجه کنید:

مختصات قطبی (دیاگرام بُد)	مختصات کارتیزین (دیاگرام نایکوئیست)
$G(jw) = G(jw) e^{-\angle G(jw)}$	$G(jw) = \text{Re}[G(jw)] + j \text{Im}[G(jw)]$



شکل ۲ - یک دیاگرام نمونه نایکوئیست (پایدارمحور).



شکل ۱ - یک دیاگرام نمونه نایکوئیست (عملکردمحور).

سیستم درجه اول با بهره واحد

در صورتی که $G(s)$ به صورت یک سیستم درجه اول باشد: $G(jw) = \frac{1}{\tau wj + 1}$ ، آنگاه حالات حدی زیر برقرار است:

$$w \rightarrow 0 : \begin{cases} AR \rightarrow 1 \\ \phi \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$w \rightarrow \infty : \begin{cases} AR \rightarrow 0 \\ \phi \rightarrow -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

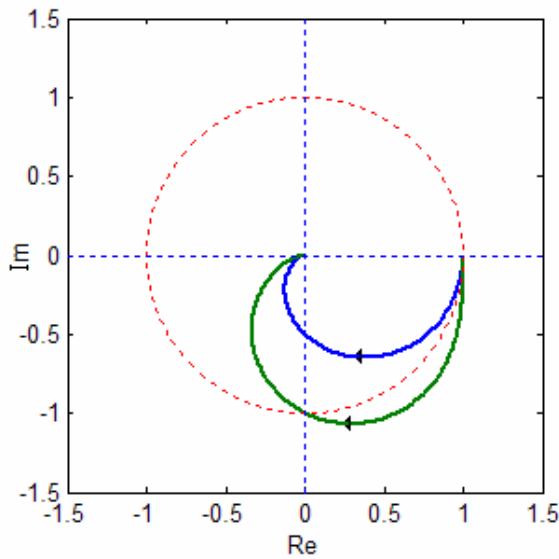
در نتیجه، دیاگرام (شکل ۳) فقط در ربع چهارمست ($-\frac{\pi}{2} < \phi < 0$) و از دایره واحد خارج نمی‌شود ($0 < AR < 1$).

سیستم درجه دوم با بهره واحد

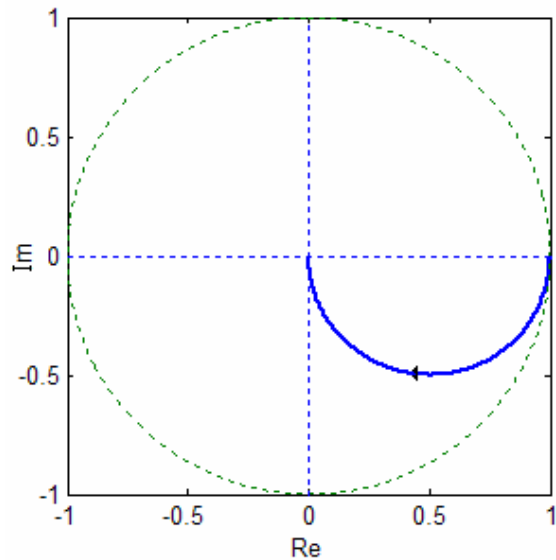
در صورتی که $G(s)$ به صورت یک سیستم درجه دوم (کلی) باشد آنگاه حالات حدی زیر برقرارست:

$$w \rightarrow 0 : \begin{cases} AR \rightarrow 1 \\ \phi \rightarrow 0 \end{cases}, \quad w \rightarrow \infty : \begin{cases} AR \rightarrow 0 \\ \phi \rightarrow -\pi \end{cases}$$

در نتیجه، دیاگرام (شکل ۴) در ربع سوم و چهارم قرار می‌گیرد ($-\pi < \phi < 0$) و در صورتی که $\xi \leq 0.7$ باشد، از دایره واحد خارج نمی‌شود.



شکل ۴- دیاگرام نایکوئیست برای سیستم درجه دوم با بهره واحد.



شکل ۳- دیاگرام نایکوئیست برای سیستم درجه اول با بهره واحد.

سیستم درجه سوم با بهره واحد

در صورتی که $G(s)$ به صورت یک سیستم درجه سوم (با قطب‌های حقیقی) باشد آنگاه حالات حدی زیر برقرارست:

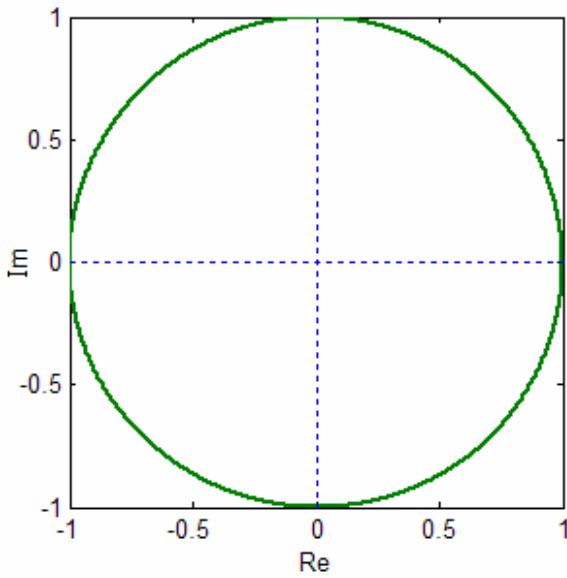
$$w \rightarrow 0 : \begin{cases} AR \rightarrow 1 \\ \phi \rightarrow 0 \end{cases}, \quad w \rightarrow \infty : \begin{cases} AR \rightarrow 0 \\ \phi \rightarrow -\frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

در نتیجه، دیاگرام (شکل ۵) برای فرکانسهای مختلف در ربع دوم، سوم و چهارم قرار می‌گیرد ($-\frac{3\pi}{2} < \phi < 0$).

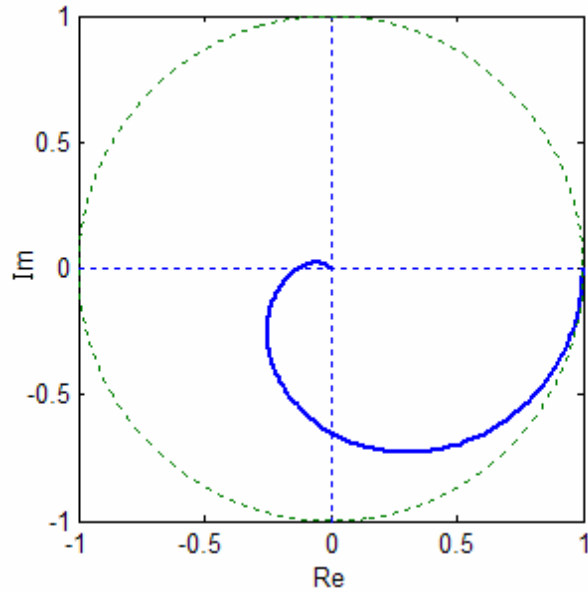
تاخیر انتقالی

در صورتی که $G(s)$ به صورت یک تاخیر انتقالی محض باشد، آنگاه دیاگرام نایکوئیست (شکل ۶) آن به صورت یک دایره است:

$$AR = 1, \quad \phi = -\tau_d w$$



شکل ۶- دیاگرام نایکوئیست برای تاخیر انتقال محض با بهره واحد.

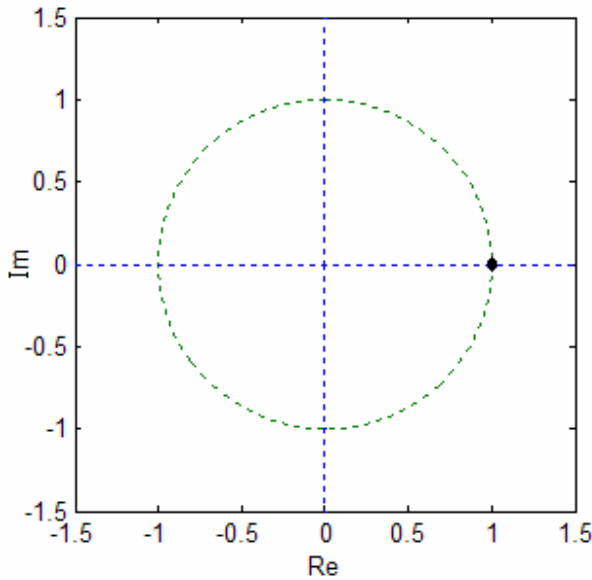


شکل ۵- دیاگرام نایکوئیست برای سیستم درجه سوم با بهره واحد.

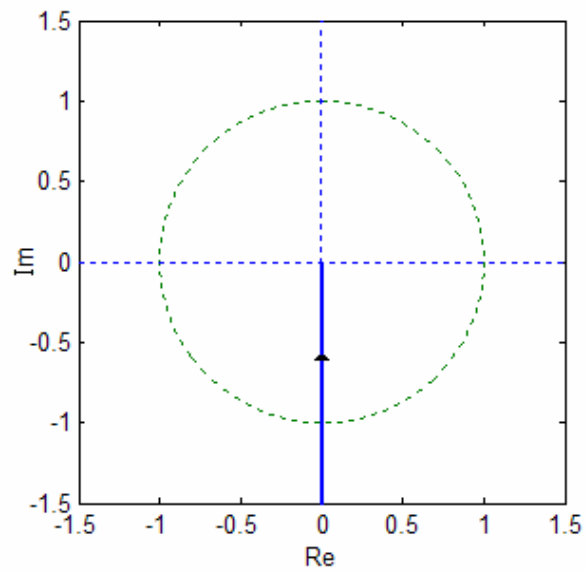
انتگرال گیر (pure capacitive) با بهره واحد

دیاگرام نایکوئیست انتگرالگیر (شکل ۷) همان محور موهومیست:

$$G(s) = \frac{1}{s} \rightarrow G(jw) = \frac{1}{jw} = \frac{-1}{w} j, \quad w \rightarrow \infty : \begin{cases} AR \rightarrow \infty \\ \phi \rightarrow -\frac{\pi}{2} \end{cases}, \quad w \rightarrow 0 : \begin{cases} AR \rightarrow 0 \\ \phi \rightarrow -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$



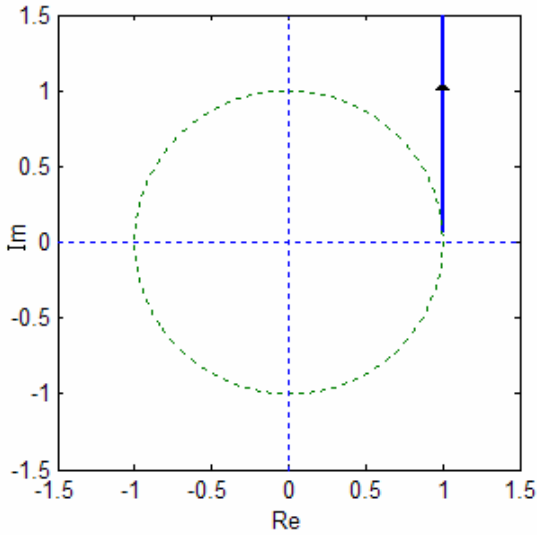
شکل ۸- دیاگرام نایکوئیست برای بهره واحد (کنترلر تناسبی).



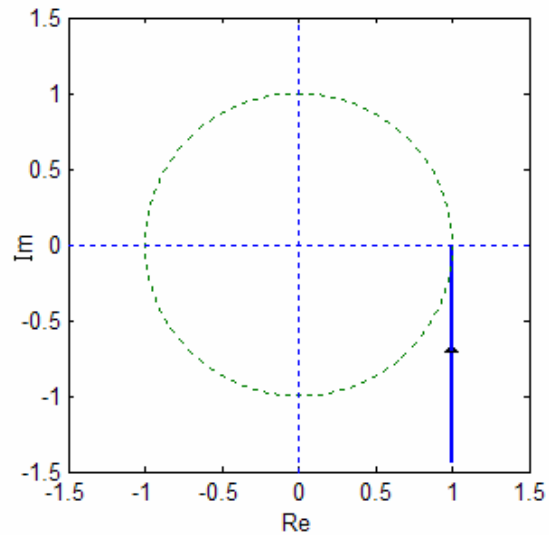
شکل ۷- دیاگرام نایکوئیست برای سیستم انتگرالگیر با بهره واحد.

کنترلر P

دیاگرام نایکوئیست یک کنترلر تناسبی (شکل ۸)، عملاً یک نقطه است!



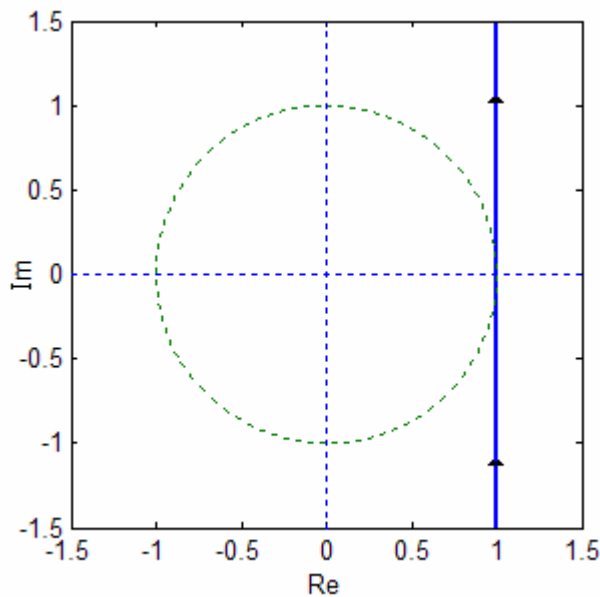
شکل ۱۰- دیاگرام نایکوئیست برای کنترلر تناسبی - مشتقی با بهره واحد.



شکل ۹- دیاگرام نایکوئیست برای کنترلر تناسبی - انتگرالی با بهره واحد.

کنترلر PI (بهره واحد)، کنترلر PD (بهره واحد) و کنترلر PID (بهره واحد)

دیاگرام نایکوئیست کنترلرهای کامپوزیت تناسبی-انتگرالی، تناسبی-مشتقی و تناسبی-انتگرالی-مشتقی در شکل‌های ۹، ۱۰ و ۱۱ (به ترتیب) رسم شده‌اند.



شکل ۱۱- دیاگرام نایکوئیست برای کنترلر تناسبی-انتگرالی-مشتقی با بهره واحد.

معیار پایداری نایکوئیست

ذی المقدمه - استفاده از دیاگرام نایکوئیست برای محک پایداری مانند سایر ابزار گرافیکی کلاسیک نیازمند یک پشتوانه ریاضی می باشد. معیار پایداری نایکوئیست عملاً استفاده یا نتیجه کاربردی یک قضیه ریاضی در جبر اعداد مختلط می باشد:

اگر منحنی $G^{OL}(j\omega)$ وقتی ω از صفر تا بینهایت تغییر کند، نقطه $(-1, 0)$ را دور بزند،

آنگاه $G^{CL}(s)$ ناپایدار است.

در ادامه به ذکر قضیه کدایی و اثبات آن و همچنین استفاده ابزاری از آن می پردازیم.

قضیه: اگر یک تابع کمپلکس مثل $F(s)$ به تعداد z تا صفر (ریشه های چند جمله ای صورت) و p تا قطب (ریشه های چند جمله ای مخرج) در یک منطقه خاص از صفحه کمپلکس s داشته باشد، آنگاه به اندازه $z-p$ دفعه، منحنی نگاشت شده توسط $F(s)$ ، (در صفحه کمپلکس $F(s)$) مبدا را دور می زند.

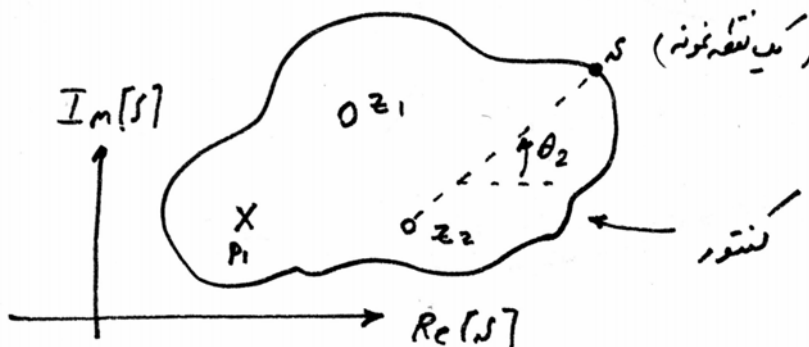
یادآوری: دامنه انتخاب اعداد کمپلکس همیشه از روی یک صفحه است. این در حالیست که اعداد حقیقی همیشه از یک طیف، گستره یا به طور کلی از روی یک محور یا خط انتخاب می شوند. لذا در مقام تناظر با جبر اعداد حقیقی، اگر تابع $y = f(x)$ ، مقادیر انتخابی x را از روی محور اعداد حقیقی، به روی محور اعداد حقیقی y ، نگاشت می کند، در حالت کمپلکس مقادیر انتخابی x را از روی صفحه اعداد کمپلکس به روی صفحه اعداد کمپلکس y نگاشت خواهد کرد.

برای اثبات (استقرایی) قضیه فوق، به یک مثال ساده توجه کنید:

فرض کنید تابع کمپلکس $F(s)$ بصورت یک تابع گویا به شکل زیر باشد:

$$F(s) = \frac{(s-z_1)(s-z_2)}{s-p_1}$$

محل قطبها و صفرها در صفحه مختلط در شکل ۱۲ نشان داده شده است.



شکل ۱۲ - محل قطبها و صفرهای $F(s)$ در صفحه کمپلکس s .

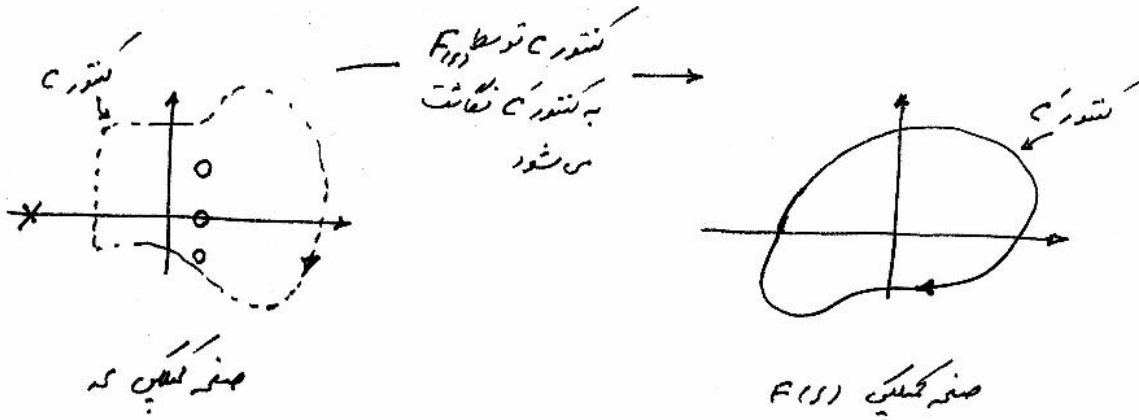
حال برای محاسبه فاز (زاویه) عدد کمپلکس $F(s)$ از جمع جبری فازهای صفرها و قطبها استفاده می کنیم:

$$\angle F(s) = \angle z_1 + \angle z_2 - \angle p_1$$

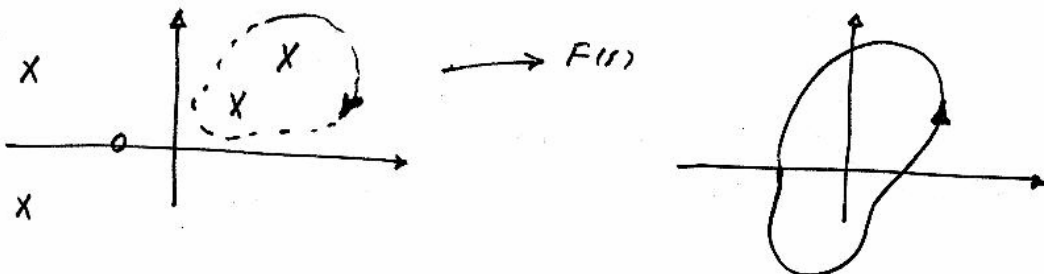
حال یک نقطه نمونه مثل s روی کنتور نمونه (کنتوری که همه قطبها و صفرها را شامل شود) انتخاب کنید. زاویه θ_2 ، زاویه خط یا برداری است که بین s و z_2 تشکیل می شود. حال اگر نقطه s را روی کنتور کدایی حرکت دهیم، بطوریکه

یک دور کامل بزند، یعنی θ_2 بین صفر تا 2π تغییر کند، آنگاه $\angle F(s)$ نیز به اندازه 2π تغییر می کند. دقیقا مشابه همین کار، برای θ_1 (زاویه بین s و z_1) نیز اتفاق می افتد و می توان ادعا کرد که $\angle F(s)$ همیشه به اندازه 2π ضربدر تعداد صفرها (با توجه به رابطه بالا) وقتی که روی کنتور یک دور کامل بزند، اضافه می شود. به طریق اولی، برای قطبها نیز می توان ادعا کرد که $\angle F(s)$ به اندازه تعداد قطبها ضربدر 2π ، کم می شود و بدین شکل قضیه مزبور اثبات می شود.

نکته: دقت شود از اول هم معلوم بود، چون با دور زدن سروکار داریم، لذا فقط به زاویه و فاز پرداختیم و به همین دلیل، اصلا شکل و فرم $F(s)$ (یعنی اندازه و فاز با هم) را نشان ندادیم یا رسم نکردیم ولی برای حفظ کلیت مساله و مانوس شدن قضیه، در زیر چند نگاشت نمونه (شکلهای ۱۳ و ۱۴) آورده شده است:



شکل ۱۳ - کنتور C' به اندازه $N = z - p = 3 - 0 = 3$ بار مبدار را دور می زند.



شکل ۱۴ - کنتور C' به اندازه $N = z - p = 0 - 2 = -2$ بار مبدار را دور می زند (علامت منفی به معنی خلاف جهت حرکت روی C می باشد).

استفاده از قضیه مزبور برای محک پایداری سیستم مدار بسته

برای یک سیستم مدار بسته، $F(s)$ مورد نظر، همان معادله مشخصه سیستم یعنی $F(s) = 1 + G^{OL}(s)$ را در نظر می گیریم. اگر معادله مزبور دارای ریشه های RPH باشد، آنگاه می گوئیم سیستم مدار بسته ناپایدار است. برای استفاده از قضیه مذکور، باید کنتور C را نیز معرفی کنیم، لذا برای اینکه تمام صفرهای $F(s)$ سمت راست صفحه کمپلکس را شامل شود، می توان یک مستطیل با طول و عرض بی نهایت (طول به اندازه دو برابر محور موهومی مثبت و عرض به اندازه محور حقیقی مثبت) در نظر گرفت یا برای سهولت یک نیم دایره با شعاع بی نهایت بطوری که ربع اول و چهارم صفحه کمپلکس s را شامل شود.

آنگاه با شمردن تعداد دور هایی که تابع $1+G^{OL}(s)$ حول مبدا می‌زند، می‌توان به اختلاف تعداد قطب‌ها و صفرهای $F(s)$ رسید. این در حالیکه برای ما تعداد صفرهای $F(s)$ (یعنی قطب‌های مدار بسته) مهم است که آیا در RPH قرار دارند یا خیر؟

برای محاسبه تعداد قطب‌های مدار بسته یا صفرهای $F(s)=1+G^{OL}(s)$ ، به رابطه زیر توجه کنید: $N = z - p$ به‌طوریکه:

N : تعداد دورزدن‌های مبدا،

z : تعداد صفرهای $F(s)$ با قسمت حقیقی مثبت یا تعداد قطب‌های مدار بسته با قسمت حقیقی مثبت،

p : تعداد قطب‌های $F(s)$ یا تعداد قطب‌های مدار باز با قسمت حقیقی مثبت،

و در نتیجه خواهیم داشت: $z = N + p$

نکته: از آنجایی که با رسم $G(s)$ در صفحه کمپلکس آشنایی بیشتری داریم تا رسم $F(s)=1+G^{OL}(s)$ ، لذا بهتر است یک شیفت در $F(s)$ بدهیم، یعنی $F(s)$ را بصورت $F'(s)$ در نظر بگیریم: $F'(s) = F(s) - 1 = G^{OL}(s)$ در این صورت قضیه مزبور، که شکل «... دور زدن حول $(0,0)$...» را داشت به شکل «... دور زدن حول $(-1,0)$...» در می‌آید.

از قبل نیز می‌دانستیم که قطب‌های $1+G(s)$ ، همان قطب‌های $G(s)$ است ($G(s)$ را به صورت گویا نوشته و آنگاه با ۱ مخرج مشترک بگیرید، بدیهیست اگر ریشه‌های مخرج و صورت یکی نباشند، آنگاه ریشه‌های مخرج حاصل $1+G(s)$ ، همان ریشه‌های مخرج $G(s)$ می‌باشد). لذا به این شکل عمل می‌کنیم: اگر $F(s)$ نگاشت کنتور نیم‌دایره با شعاع ∞ که RPH را شامل می‌شود، باشد، آنگاه تعداد دور زدن‌های مبدا توسط نگاشت مزبور بعلاوه تعداد قطب‌های RPH مدار باز می‌شود تعداد قطب‌های RPH مدار بسته.

اگر خلاصه کنیم:

کنتور نیم‌دایره با شعاع ∞ که شامل ربع اول و چهارم می‌شود را در نظر گرفته و روی آن به‌اندازه یک دور کامل حرکت کنید. با این جابجایی، هر نقطه s که روی $F'(s)$ یا $G(s)$ نگاشته می‌شود، نیز جابجا می‌شود. تعداد دور هایی که نگاشت $G(s)$ (همان دیاگرام نایکوئیست کامل) حول نقطه $(-1,0)$ می‌زند (یعنی N) را بشمارید (مواظب جهت دور زدن باشید، مثلاً اگر دوبار $(-1,0)$ را یک‌بار در جهت مثلثاتی و یک‌بار در جهت عقربه‌های ساعت دور زد، آنگاه $N=0$ است، نه $N=2$). سپس از روی تابع انتقال مدار باز، تعداد قطب‌های RPH را معلوم کنید، یعنی اگر مدار باز ناپایدارست (معمولاً فرآیند ناپایدار است تا کنترلر: $G^{OL} = G_C G_p$) تعداد قطب‌های ناپایدار همان P است ولی اگر مدار باز پایدار باشد آنگاه $p=0$ است. از روی N و P ، می‌توان تعداد قطب‌های مدار بسته ناپایدار را معلوم کرد:

$$z = N + p \quad (\text{تعداد قطب‌های ناپایدار مدار بسته})$$

نکته: منظور از دیاگرام نایکوئیست کامل (پایدارمحور)، یعنی رسم همزمان $G(j\omega)$ و $G(-j\omega)$ می‌توان برای هر تابع تحلیلی کمپلکس نشان داد که با تغییر متغیر s به $-s$ ، نگاشت مزبور تصویر آینه نگاشت اولیه نسبت به محور حقیقی می‌شود. علت و ایجاب رسم همزمان $G(j\omega)$ و $G(-j\omega)$ بخاطر این است که بخشی از کنتور نیم‌دایره در راستای محور $j\omega$ و بخشی دیگر در

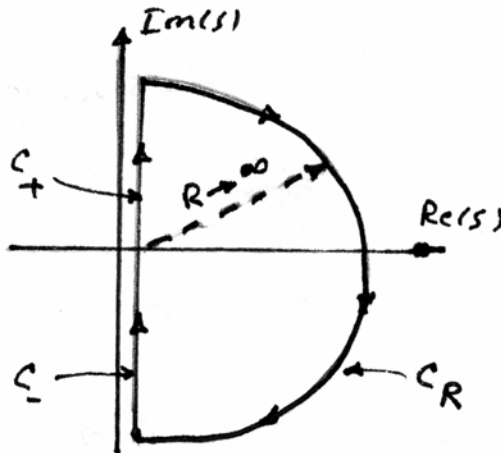
راستای محور $-jw$ حرکت می کند. در مثال روشن می شود.

نکته: ناپایدار بودن تابع انتقال مدار باز، یا ناشی از تابع انتقال فرآیندست یا کنترلر. چون دینامیک سنسور یا دینامیک شیر کنترلر و سایر المانهای مدار باز همیشه به صورت پایدار انتخاب می شوند. به هر حال، در اغلب اوقات اگر مدار باز ناپایدار باشد، ناشی از فرآیندست و طراحی کنترلر ناپایدار به ندرت اتفاق می افتد (در برخی از سیستم های هوا فضا و فرآیندهای بسیار نادر که کنترلر مقاوم یا مدرن برای آنها طراحی می شود، ممکنست دینامیک کنترلر به تنهایی ناپایدار باشد ولی بدیهیست که در ترکیب با بقیه عناصر در مدار، کل مجموعه یعنی مدار بسته پایدار باشد).

مثال ۱: یک فرآیند درجه سوم (مثل سه تانک سری) در نظر بگیرید که با یک کنترلر تناسبی کنترل می شود، بقیه المانها را به صورت بهره واحد در نظر بگیرید:

$$G^{OL}(s) = \frac{K_C}{(s+1)^3}$$

تحلیل پایداری نایکوئیست: فرآیند و کنترلر هر دو پایدار هستند، لذا مدار باز سیستم هیچ قطب ناپایدار (قطب RPH) ندارد، پس $p=0$ است. کنتور حرکت s در صفحه کمپلکس همان نیمدایره با شعاع ∞ است، (شکل ۱۵).



شکل ۱۵- کنتور کنذایی برای مطالعات تحلیلی.

برای بررسی دقیق اینکه چه اتفاقی می افتد، کنتور مزبور به سه قسمت C_+ ، C_R و C_- تقسیم می کنیم، بطوریکه C_+ مسیر حرکت نقطه نمونه s در راستای محور موهومی مثبت (از مبدا تا $+\infty$)، C_R مسیر منحنی نیمدایره بزرگ و C_- برگشت کنتور از $-\infty$ تا مبدا روی قسمت منفی محور موهومی می باشد:

کنتور C_+ : روی C_+ ، نقطه s یک عدد مختلط محض است، لذا $s = jw$ به طوریکه w از صفر تا بی نهایت تغییر می کند. برای اینکه ببینیم این مکان توسط $G(s)$ ، به چه مکانی از اعداد مختلط نگاشت می شود، به ترتیب زیر عمل می کنیم:

$$G^{OL}(s) = \frac{K_C}{(jw+1)^3}$$

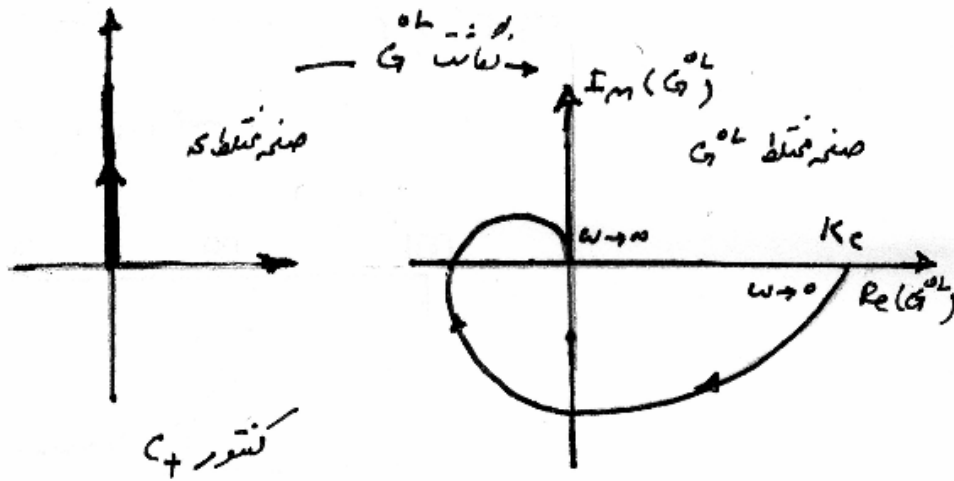
عدد مختلط $G^{OL}(jw)$ اگر در صفحه کمپلکس $G^{OL}(jw)$ رسم کنیم، عملاً نگاشت مزبور را رسم کرده ایم، به عبارت دیگر دیاگرام نایکوئیست را رسم کرده ایم! (شکل ۱۶ الف)

کنتور C_R : روی این کنتور (مکان) s باید به شکل $s = Re^{j\theta}$ باشد، بطوریکه R مقدار ∞ دارد و θ مقادیر $\pi/2$ تا $-\pi/2$ را اختیار می کند، برای رسم نگاشت آن باید به جای هر s در $G^{OL}(s)$ بگذاریم $Re^{j\theta}$:

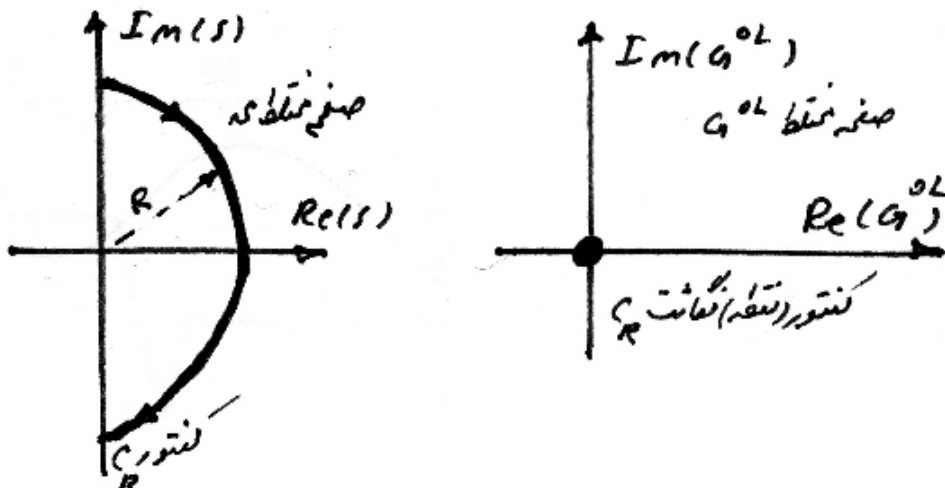
$$G^{OL}(Re^{j\theta}) = \frac{K_c}{(Re^{j\theta} + 1)^3} = 0 + 0j$$

یعنی نیم دایره به آن بزرگی، به مبدا نگاشت می شود! (شکل ۱۶ ب).

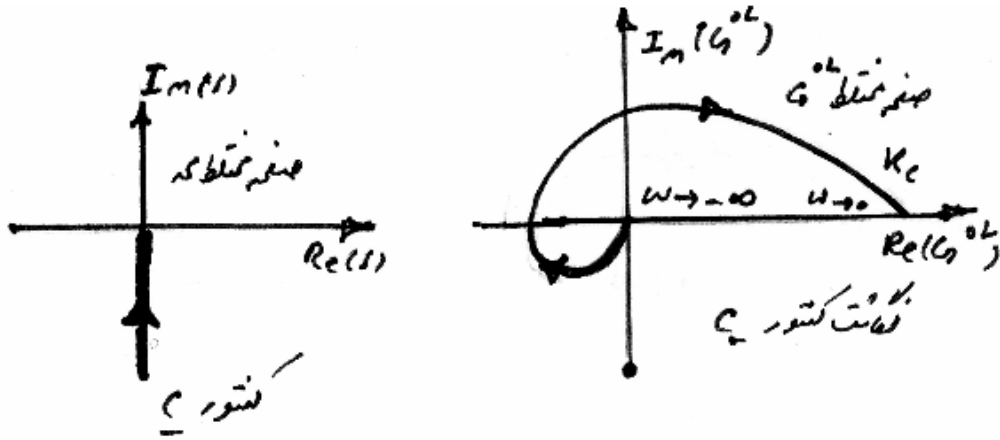
کنتور C_- : در تقارن با C_+ ، نگاشت مزبور کمپلکس مزدوج دیاگرام نایکوئیست می شود، یعنی همان دیاگرام نایکوئیست ولی تصویر آئینه آن، بطوریکه s از ∞ تا صفر حرکت کند (شکل ۱۶ ج).



شکل ۱۶ الف- کنتور و نگاشت آن.

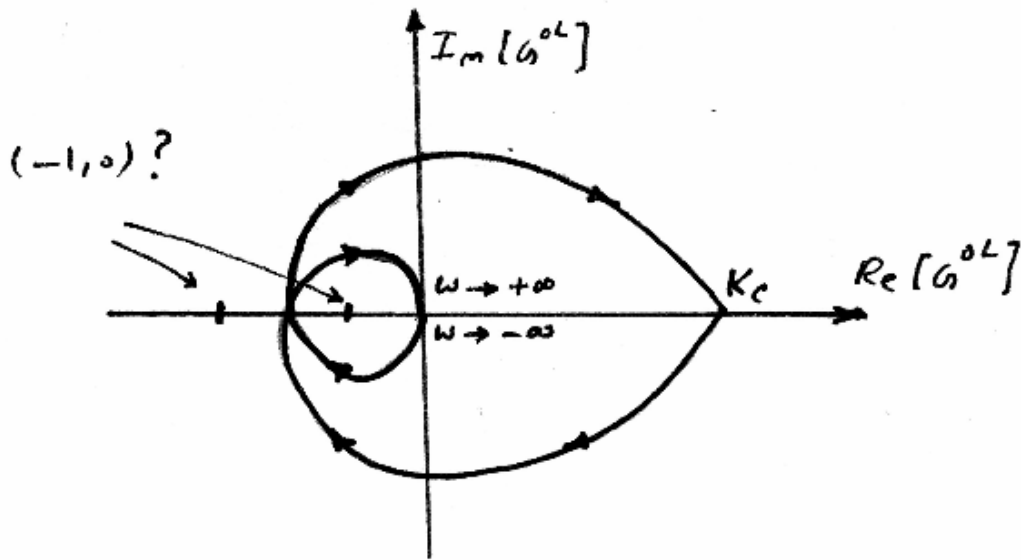


شکل ۱۶ ب- کنتور و نگاشت آن.



شکل ۱۶-ج- کنتور و نگاشت آن.

دیاگرام کامل نایکوئیست در شکل ۱۷ نشان داده شده است. هر چه K_C بزرگتر شود، دیاگرام نیز بزرگتر شده و لذا ممکن است نقطه $(-1,0)$ را شامل شود. اگر محل تقاطع دیاگرام با قسمت منفی محور حقیقی جلوتر از $(-1,0)$ اتفاق بیافتد، آنگاه برای آن K_C خاص که دیاگرام رسم شده، نقطه $(-1,0)$ را شامل نمی‌شود، چه برسد که آن را دور بزند، پس $N=0$. لذا چون p نیز صفر بود، پس قطب مدار ناپایدار نداشته و لذا معیار پایداری نایکوئیست می‌گوید که سیستم مدار بسته پایدار است. ولی اگر K_C آنقدر بزرگ بود که نقطه $(-1,0)$ در داخل دیاگرام می‌افتاد آنگاه $N=2$ و لذا $z=N+p=2$ پس سیستم مدار بسته ناپایدار خواهد بود.



شکل ۱۷- دیاگرام نایکوئیست کامل ($-\infty < w < \infty$).

برای تطابق با مباحث اخیر، بیایم K_C بحرانی را بدست آوریم. K_C بحرانی، مقداری از K_C است که دیاگرام نایکوئیست در محل $(-1,0)$ ، [یعنی برزخ داخل بودن در دیاگرام یا خارج بودن] با محور حقیقی تقاطع دارد:

$$G^{OL}(jw) = \frac{K_C}{(jw+1)^3} = \frac{K_C}{(1-3w^2) + j(3w-w^3)} = \frac{K_C(1-3w^2)}{(1-3w^2)^2 + (3w-w^3)^2} + j \frac{K_C(w^3-3w)}{(1-3w^2)^2 + (3w-w^3)^2}$$

این عدد مختلط را با عدد مختلط $-1+0j$ متحد قرار دهید، مثلاً با قست موهومی:

$$\frac{K_C(w^3-3w)}{\dots} = 0 \rightarrow (K_C \neq 0) \rightarrow (w^3-3w) \rightarrow \begin{cases} w=0 \text{ intersection with positive section} \\ w=\sqrt{3} \text{ intersection with negative section} \end{cases}$$

لذا، w بحرانی معادل $\sqrt{3}$ می‌شود:

$$w_u = \sqrt{3} \rightarrow T_u \text{ or } P_u = \frac{2\pi}{w_u} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \text{ (time unit)}$$

با استفاده از w بحرانی، مقدار K_C بحرانی (یا همان K_u) به دست می‌آید:

$$\left. \frac{K_C(1-3w^2)}{(1-3w^2)^2 + (3w-w^3)^2} \right|_{w=\sqrt{3}} = -1 \rightarrow -\frac{K_C}{8} = -1 \rightarrow K_C = 8 = K_u$$

حال اگر همین مقدار را با استفاده از مکان هندسی ریشه‌ها مطالعه کنید، در می‌یابید که در $K_C = 8$ ، مکان قطب‌های مدار بسته محور موهومی را قطع می‌کند و دو ریشه ناپایدار خواهد داشت (برای $K_C > 8$)، دقت شود نایکوئیست هم همین را گفت ($N=2$).

مثال ۲: سیستم مدار باز زیر را در نظر بگیرید (تابع مدار باز دارای انتگرال گیر است):

$$G^{OL}(s) = \frac{K_C}{s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

این سیستم می‌تواند یک فرآیند دارای انتگرال گیر باشد (مثل دینامیک هیدرولیک سینی‌های برج تقطیر) که توسط یک کنترلر تناسبی کنترل می‌شود، یا کلاً فرآیندهایی که با PI یا PID کنترل می‌شوند. مشکلی که این مساله پیش می‌آورد اینست که وقتی روی کنترلر C_+ یا C_- حرکت می‌کنیم، نگاهت مبدا، نقطه ∞ می‌شود، اگر خیلی کلی صحبت کنیم، اصولاً وقتی مدار باز دارای قطب یا قطب‌های روی محور موهومی باشد، این مشکل پیش می‌آید، مثل سیستم مدار باز $\frac{\dots}{(s^2+1)\dots(s^4+2)}$ که دارای دو جفت قطب کونژوگه $\pm j$ و $\pm j\sqrt{2}$ می‌باشد. برای حل این معضل باید کنترلر s در صفحه کمپلکس را کمی عوض کنیم، بدینصورت وقتی به محل این قطب‌های موهومی می‌رسیم آنرا دور بزیم، مثلاً با یک نیم‌دایره کوچک به شعاع r_0 (به‌طوری‌که $r_0 \rightarrow 0$)، چرا که علت وجود کنترلر s اینست که تمام صفرها و قطب‌ها ناپایدار یا RPH، $1+G$ را در صورت وجود شامل شود (شکل ۱۸).

بدین ترتیب برای این مثال، با چهار تکه از کنترلر s سروکار داریم: C_+ ، C_- ، C_R و C_0 :

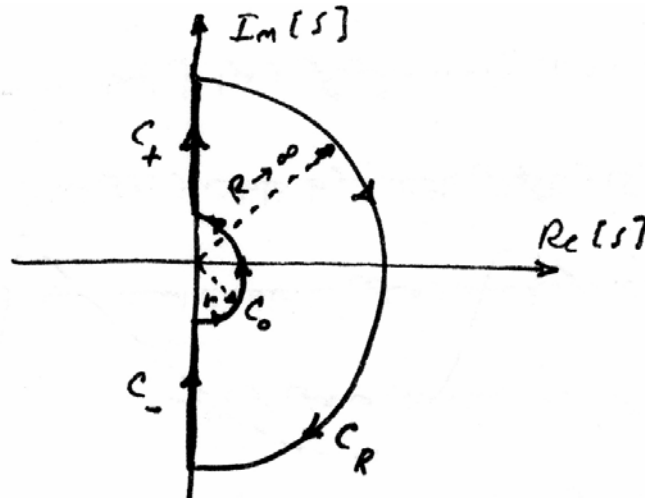
دی‌گرام نایکوئیست $G^{OL}(jw)$ (به‌طوری‌که $w \in (0, +\infty)$): $s = jw$ as w goes from r_0 to R (کنترلر C_+)
($r_0 \rightarrow 0$ & $R \rightarrow \infty$)

مبدا: $s = Re^{j\theta} : G(Re^{j\theta}) = 0$ (کنترلر C_R)

قرینه نایکوئیست $G^{OL}(-jw)$: $s = jw$ as w goes from $-\infty$ to r (کنترلر C_-)
($R \rightarrow \infty$)

نیم‌دایره‌ای به شعاع بی‌نهایت: $s = r_0 e^{j\theta}$ where r_0 goes zero and θ varies from $-\frac{\pi}{2}$ to $\frac{\pi}{2}$ (کنترلر C_0)

$$(G^{OL}(r_0 e^{j\theta})) = \lim_{r_0 \rightarrow 0} \left\{ \frac{K_C}{r_0 e^{j\theta} (\tau_1 r_0 e^{j\theta} + 1)(\tau_2 r_0 e^{j\theta} + 1)} \right\} = \lim_{r_0 \rightarrow 0} \left\{ \frac{K_C}{r_0} e^{j\theta} \right\} \quad \text{(اثبات)}$$



شکل ۱۸- کنتور s بهبود یافته.

شکل کامل نگاشت در شکل ۱۸ نمایش داده شده است.

برای بحث پایداری باید دید به ازای هر K_C خاص، آیا نگاشت مزبور نقطه $(-1,0)$ را دور می زند یا خیر. برای محاسبه K_u نیز باید مثل مثال قبل عمل کرد:

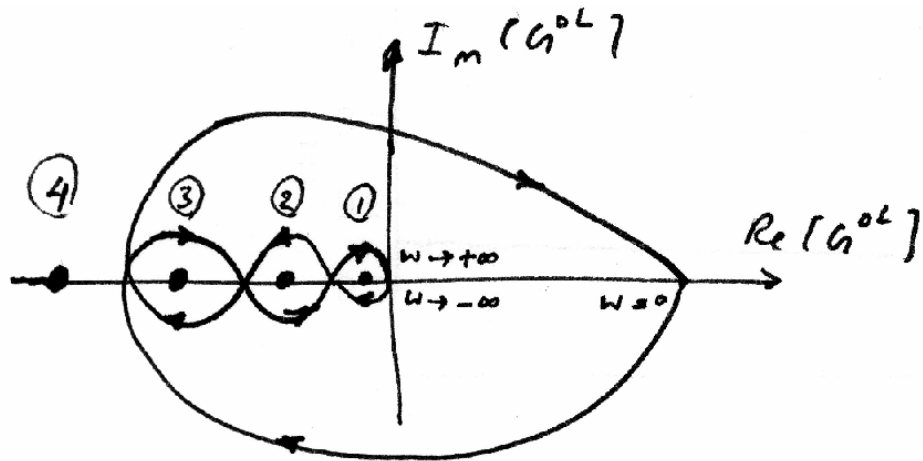
$$K_u = \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2}, \quad w_u = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}}$$

از دو مثال قبل متوجه شدیم که برای رسم نگاشت شاهد، فقط نیاز به نگاشت C_+ داریم، یعنی همان دیاگرام نایکوئیست، چون بقیه کار با قرینه آن کامل می شود. اگر مدار باز، قطب روی محور موهومی نداشت یا در حالت خاص تر، انتگرال گیر نداشت، دیاگرام نایکوئیست همراه با قرینه اش، تشکیل یک کنتور بسته ولو پیچیده و تو در تو را می دهد. لذا به راحتی می توان شامل شدن نقطه $(-1,0)$ را بررسی کرد. حال اگر قطب مدار باز محور موهومی داشت یا در حالت خاص تر، انتگرال گیر داشت، آنگاه دیاگرام نایکوئیست به همراه قرینه اش، بصورت بسته و convex در نمی آمد، بلکه دارای مجانب و شاخه های concave است. برای بستن آن یک نیمدایره بکشید تا شاخک را نبینید!!! برای این که بفهمید نیمدایره را راست ببندید یا چپ، از دیاگرام C_+ یا همان نایکوئیست استفاده کنید، بدین ترتیب که از $w=0$ روی دیاگرام شروع کرده و حرکت کنید به سمت $w=\infty$ ، در $w=\infty$ بروید روی منحنی قرینه. برای این کار یا از نیمدایره عظیمه استفاده کنید یا اینکه بلافاصله می توانید بروید. بدین ترتیب سعی کنید کنتور نگاشت را ببندید، بدون اینکه نوک قلم را از روی کاغذ بردارید.

مثال ۳: (پایداری شرطی) سیستم مدار باز زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{K_C(\tau's+1)}{(\tau_1s+1)(\tau_2s+1)(\tau_3s+1)(\tau_4s+1)}$$

خود شکل گویاست، با عوض کردن K_C در یک منطقه خاص، دیاگرام نقطه $(-1,0)$ را دور می زند (ناپایدار) و دور نمی زند (پایدار).



شکل ۱۹- دیاگرام نایکوئیست مثال ۳.

- نقطه $(-1, 0)$ در محل ① باشد: سیستم ناپایدار
- نقطه $(-1, 0)$ در محل ② باشد: سیستم پایدار
- نقطه $(-1, 0)$ در محل ③ باشد: سیستم ناپایدار
- نقطه $(-1, 0)$ در محل ④ باشد: سیستم پایدار